La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les quatre parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Dans ce sujet, les candidats sont invités à illustrer, s'ils le jugent nécessaire, leurs réponses avec un dessin.

Partie I

Dans l'espace euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k})$, on condidère la surface S_1 d'équation cartésienne $xy^2+yz^2+zx^2+2xyz+5=0$, la surface S_2 d'équation cartésienne $2x-3y+z=7$ et le point M_0 de coordonnées $(1,-1,2)$. On note Λ l'intersection de S_1 et S_2.

1. Vérifier que $M_0 \in \Lambda$.
2. Déterminer une équation du plan tangent à S_1 en M_0.
3. En déduire une représentation cartésienne, puis un vecteur directeur de la tangente à Λ en M_0.

Partie II

Dans le plan euclidien rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\,\vec{j})$, on considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) = \dfrac{1}{t^2} + 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}^{-\star}.$$

Pour tout t strictement négatif, on désigne par M_t le point de Γ de paramètre t.

1. (a) Justifier qu'une représentation paramétrique de la normale à Γ au point M_t, $t \in \mathbb{R}^{-\star}$, est :
$$\begin{cases} x_t(u) = t^2 + \dfrac{2}{t} + u \\ y_t(u) = \dfrac{1}{t^2} + 2t - tu \end{cases},\ u \in \mathbb{R}$$
   (b) En déduire une représentation paramétrique de la développée de Γ.
   (c) Utiliser ce résultat pour donner le centre et le rayon du cercle de courbure de Γ au point M_{-1}, de paramètre $t=-1$.
2. Soit Σ le cercle de centre Ω de coordonnées $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, et de rayon $r>0$. On dit que Σ et Γ sont tangents en un point A si
   - $A \in \Sigma \cap \Gamma$;
   - la tangente à Σ en A et la tangente à Γ en A sont confondues.

   (a) Exprimer b et r en fonction de a pour que Σ et Γ soient tangents en M_{-1}.
   (b) Dans ces conditions, donner une équation de Σ sous la forme $f_a(x,y)=0$ ne dépendant que du paramètre a.
   (c) Effectuer les développements limités de $x(t)$ et $y(t)$ à l'ordre 3 en $t=-1$. On donne $f_a(x(t),y(t)) = (28-4a)(t+1)^2 + (28-4a)(t+1)^3 + o((t+1)^3)$
   (d) Déterminer a pour qu'au voisinage de $t=-1$, $f_a(x(t),y(t)) = o\left((t+1)^3\right)$. Quelle(s) remarque(s) peut-on faire concernant Ω et r ?

Partie III

Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sera noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et la norme du vecteur $\vec{u}$ sera notée $\|\vec{u}\|$.

1. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et I un point du plan.
   Une droite $\mathcal{D}$ passant par I et sécante à $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{C}$ en A et B.
   On note A' le symétrique de A par rapport à O.
   (a) Démontrer que $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IA'} = IO^2 - R^2$.
   On remarque que la valeur de $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$ est indépendante de la droite $\mathcal{D}$ sécante à $\mathcal{C}$ choisie. On note $\sigma_{\mathcal{C}}(I)$ ce nombre.
   (b) Quelle information le signe de $\sigma_{\mathcal{C}}(I)$ donne-t-il sur la position du point I ?
   (c) Soit I un point du plan tel que $\sigma_{\mathcal{C}}(I) \geqslant 0$, Λ l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{OM} = 0$, et T un point de $\Lambda \cap \mathcal{C}$.
      i. Quelle est la nature de Λ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
      ii. Démontrer que $\sigma_{\mathcal{C}}(I) = IT^2$.
2. Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres respectifs O et O', distincts, de rayons respectifs $R > 0$ et $R' > 0$. On désigne par Ω le milieu du segment $[OO']$ et par Δ l'ensemble des points I du plan vérifiant $\sigma_{\mathcal{C}}(I) = \sigma_{\mathcal{C}'}(I)$.
   (a) Démontrer que
   $$\sigma_{\mathcal{C}}(I) = \sigma_{\mathcal{C}'}(I) \Longleftrightarrow 2\,\overrightarrow{OO'} \cdot \overrightarrow{\Omega I} = R^2 - R'^2$$
   (b) *i.* Soit I_1 et I_2 deux points distincts de Δ. Démontrer que les droites $(I_1 I_2)$ et (OO') sont orthogonales.
      ii. Déterminer un point I_0 appartenant à Δ et (OO').
      iii. En déduire la nature de Δ.
   (c) Que dire de plus sur Δ lorsque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants ou tangents ? Ou lorsque les deux cercles ont le même rayon ?
   (d) Dans cette question, l'unité de longueur est le centimètre. On prend $OO' = 10$, $R = 5$ et $R' = 3$. Tracer Δ.
3. (a) Soient A, B et C trois points non alignés du plan, et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit I un point de la droite (AB) distinct de A et B, et D un point de la droite (IC) vérifiant $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB}$.
   Démontrer que D appartient au cercle $\mathcal{C}$.
   (b) On se place désormais dans le plan complexe. Le vecteur $\vec{u}$ a pour affixe $z \in \mathbb{C}$, et le vecteur $\vec{v}$ a pour affixe $z' \in \mathbb{C}$.
      i. Rappeler la relation entre $\|\vec{u} + \vec{v}\|$, $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
      ii. En déduire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathcal{R}e\left(z\overline{z'}\right)$ ($\mathcal{R}e$ désigne la partie réelle).
   (c) Soient A, B, C, D et I les points d'affixes complexes respectives
   $$z_A = -3 - i,\ z_B = 5i,\ z_C = -1 - 7i,\ z_D = 14 - 2i \text{ et } z_I = -7 - 9i.$$
   Démontrer que A, B, C et D sont cocycliques (c'est-à-dire : sur un même cercle).

Partie IV

1. Question préliminaire.
   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie d, et f un endomorphisme de E. $\operatorname{Ker} f$ désigne le noyau de f, et $\operatorname{Im} f$ son image. On note $f^2 = f \circ f$. Enfin, id_E est l'endomorphisme identité de E. λ désigne un réel.

   (a) Démontrer que :
   $$\operatorname{Ker}(f - \lambda id_E) \subset \operatorname{Ker}(f^2 - \lambda^2\, id_E)$$
   Quel lien peut-on en déduire entre les valeurs propres de f et celles de f^2 ?

   (b) Démontrer que si $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f \neq \{0\}$, alors
   $$\dim\left(\operatorname{Ker} f^2\right) \geqslant \dim\left(\operatorname{Ker} f\right) + 1$$

   (c) On désigne par P_f et P_{f^2} les polynômes caractéristiques respectifs de f et f^2. Démontrer que $P_{f^2}(X^2) = (-1)^d\, P_f(X)\, P_f(-X)$.

2. Dans cette question, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3, E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
   Soit f l'application définie, pour tout polynôme P de E, par :
   $$f(P) = (X^2 - X + 1)\, P(-1) + (X^3 - X)\, P(0) + (X^3 + X^2 + 1)\, P(1)$$

   (a) Démontrer que f est un endomorphisme de E.

   (b) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Préciser leur dimension.

   (c) f est-il injectif ? Surjectif ?

   (d) Justifier que 0 est valeur propre de f. Que peut-on dire de sa multiplicité ?

   (e) Démontrer que les polynômes $Q_1 = 3\,X^3 + 4\,X^2 - 3\,X + 4$ et $Q_2 = X^3 + X$ sont des vecteurs propres de f. Quelles sont les valeurs propres associées ?

   (f) A-t-on $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$?

   (g) Quelles sont les valeurs propres de f^2 ? En déduire que f^2 est diagonalisable.

   (h) f est-il trigonalisable ? Diagonalisable ? Préciser les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Le cercle de courbure de la partie II s'appelle également cercle osculateur (du latin osculari : embrasser)... C'est le cercle « le plus proche » de la courbe.
Dans la partie III, $\sigma_{\mathcal{C}}(I)$ est la puissance du point I par rapport au cercle $\mathcal{C}$ et Δ est l'axe radical des deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Ces deux objets, avec entre autres la notion de division harmonique conduiront au XIX^e *siècle à la géométrie projective.*