Corrigé PT 2015, épreuve B.

Partie I.

1. On substitue dans le membre de gauche de l'équation de S_1 les coordonnées de M_0, et on calcule :

$$1 \times (-1)^2 + (-1) \times 2^2 + 2 \times 1^2 + 2 \times 1 \times (-1) \times 2 + 5 = 1 - 4 + 2 - 4 + 5 = 0.$$

Les coordonnées du points M_0 satisfont l'équation de S_1, donc $M_0 \in S_1$. On vérifie de même que ces coordonnées satisfont l'équation de S_2, donc $M_0 \in S_2$. Puisque M_0 appartient à S_1 et S_2, M_0 appartient à Λ, l'intersection de S_1 et S_2.

2. Notons $h(x, y, z) = xy^2 + yz^2 + zx^2 + 2xyz + 5$, de sorte que S_1 admet pour équation $h(x, y, z) = 0$. La fonction h est polynomiale, donc de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$. Calculons ses dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y, z) = y^2 + 2xz + 2yz, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y, z) = 2yx + z^2 + 2xz, \quad \frac{\partial h}{\partial z}(x, y, z) = 2zy + x^2 + 2xy,$$

de sorte que le vecteur gradient de h en M_0 admet pour coordonnées :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, h(M_0) = (1 + 4 - 4, -2 + 4 + 4, -4 + 1 - 2) = (1, 6, -5).$$

Ce vecteur gradient est non nul, sa direction est donc celle d'une normale au plan tangent à la surface S_1 en M_0, et on en déduit que ce plan tangent admet pour équation :

$$(x - 1) + 6(y + 1) - 5(z - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 6y - 5z = -15.$$

3. Puisqu'elle est définie par une équation linéaire en les coordonnées x, y et z, la surface S_2 est un plan : elle est donc son propre plan tangent en tout point. Au vu de son équation, elle admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2, -3, 1)$. Ce vecteur est non colinéaire au vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, h(M_0)$ à S_1 en M_0 obtenu à la question précédente. La tangente à la courbe Λ au point M_0 est donc l'intersection du plan S_2 et du plan tangent à S_1 en M_0, et admet donc pour équation cartésienne :

$$\begin{cases} x + 6y - 5z = -15 \\ 2x - 3y + z = 7. \end{cases}$$

De plus, cette tangente est donc dirigée par un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, h(M_0)$, par exemple le produit vectoriel de ces vecteurs. Calculons les coordonnées de ce produit vectoriel :

$$\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, h(M_0) = (9, 11, 15).$$

La tangente à Λ en M_0 admet donc pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(9, 11, 15)$.

Partie II.

1. (a) Les fonctions coordonnées définissant la courbe Γ sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^{*-}$. Calculons le vecteur vitesse en $t \in \mathbf{R}^{*-}$, il s'agit du vecteur de coordonnées :

$$(x'(t), y'(t)) = (2t - 2/t^2, -2/t^3 + 2) = \left(2 - 2/t^3\right)(t, 1).$$

On déduit de l'hypothèse $t < 0$ le fait que le facteur $2 - 2/t^3$ est strictement positif, donc non nul, et donc la tangente à Γ au point M_t est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ de coordonnées $(t, 1)$. La normale $N(t)$ à Γ au point M_t est donc dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}(t)$ de coordonnées $(1, -t)$. Puisqu'elle passe par le point de coordonnées $(x(t), y(t))$, cette normale admet comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x_t(u) = t^2 + \frac{2}{t} + u \\ y_t(u) = \frac{1}{t^2} + 2t - tu \end{cases}, u \in \mathbf{R}.$$

(b) La développée de Γ est l'enveloppe des normales. On cherche donc une courbe paramétrée φ définie sur $\mathbf{R}^{*-}$ telle que :

— pour tout t, $\varphi(t)$ appartient à la normale à Γ en M_t, donc il existe $\lambda(t)$ tel que $\varphi(t) = M_t + \lambda(t)\overrightarrow{n}(t)$ et la fonction λ est de classe C^1 ;

— pour tout t, la courbe φ admet pour tangente au point $\varphi(t)$ la droite $N(t)$, soit encore $\det(\varphi'(t), \overrightarrow{n}(t)) = 0$.

Calculons alors :

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{\mathrm{d}M_t}{\mathrm{d}t} + \lambda'(t)\overrightarrow{n}(t) + \lambda(t)\overrightarrow{n}'(t),\\
\det\left(\frac{\mathrm{d}M_t}{\mathrm{d}t}, \overrightarrow{n}(t)\right) &= \begin{vmatrix} 2t - \frac{2}{t^2} & 1 \\ 2 - \frac{2}{t^3} & -t \end{vmatrix} = \left(2 - \frac{2}{t^3}\right)(-1 - t^2)\\
\det(\overrightarrow{n}'(t), \overrightarrow{n}(t)) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

La condition $\det(\varphi'(t), \overrightarrow{n}(t)) = 0$ devient alors (par linéarité à gauche du déterminant, puis antisymétrie), pour tout $t < 0$:

$$\begin{aligned}
\det(\varphi'(t), \overrightarrow{n}(t)) = 0 &\Leftrightarrow \det\left(\frac{\mathrm{d}M_t}{\mathrm{d}t}, \overrightarrow{n}(t)\right) + \lambda(t)\det(\overrightarrow{n}'(t), \overrightarrow{n}(t)) = 0\\
&\Leftrightarrow \lambda(t) = \left(2 - \frac{2}{t^3}\right)(1 + t^2)
\end{aligned}$$

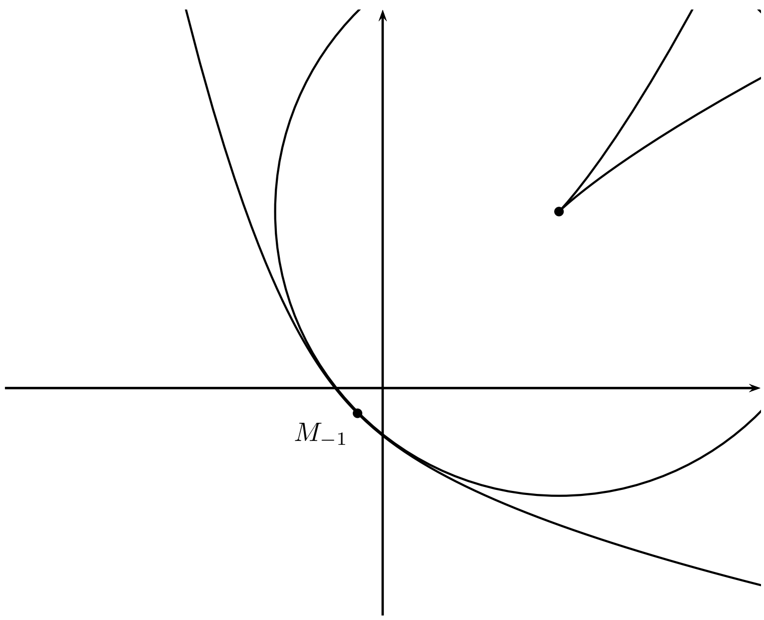
La développée de Γ admet donc pour représentation paramétrique :

$$t \in \mathbf{R}^{*-} \mapsto \left(t^2 + \frac{2}{t} + \left(2 - \frac{2}{t^3}\right)(1 + t^2), \frac{1}{t^2} + 2t - t\left(2 - \frac{2}{t^3}\right)(1 + t^2)\right),$$

soit encore :

$$t \in \mathbf{R}^{*-} \mapsto \left(3t^2 + 2 - \frac{2}{t^3}, -2t^3 + 2 + \frac{3}{t^2}\right).$$

(c) Par définition, le centre de courbure de Γ au point M_{-1} est le point de la développée de paramètre -1 : c'est le point de coordonnées $(3+2+2, 2+2+3) = (7, 7)$ d'après le résultat de la question précédente. Le rayon du cercle de courbure est alors la distance entre le point M_{-1}, de coordonnées $(-1, -1)$ et le centre de courbure correspondant, et il vaut $\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$.

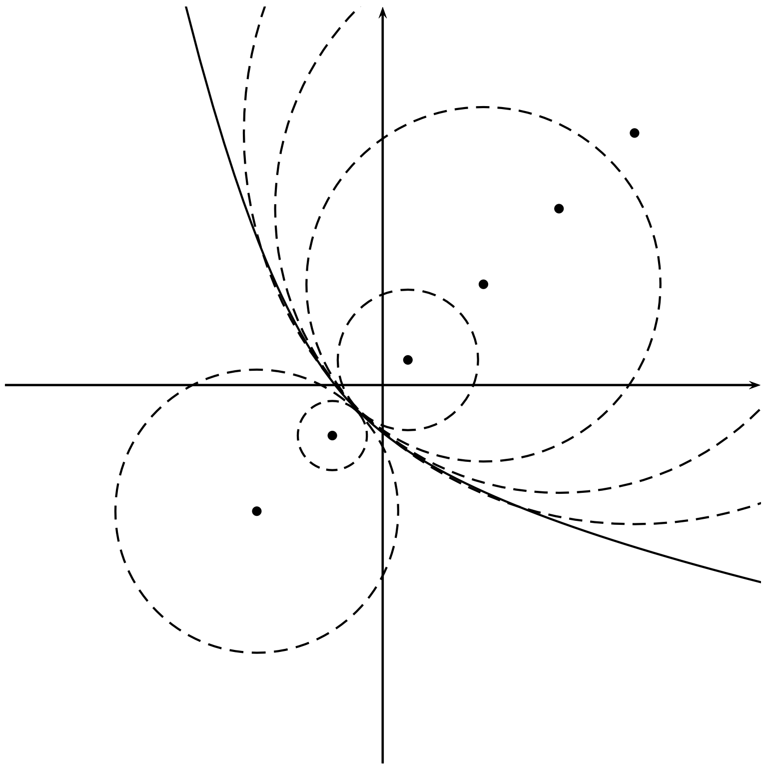


2. (a) La tangente à Γ en M_{-1} est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}(-1)$ de coordonnées $(-1, 1)$. Pour que Σ et Γ soient tangents en M_{-1}, il est nécessaire que M_{-1} appartienne à Σ, ce qui équivaut à $r = \Omega M_{-1} = \sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2}$. Il est encore nécessaire que les vecteurs $\overrightarrow{u}(-1)$ et $\overrightarrow{\Omega M_{-1}}$ soient orthogonaux, ce qui équivaut à l'annulation du produit scalaire :

$$\left(\overrightarrow{u}(-1) | \overrightarrow{\Omega M_{-1}}\right) = -(-1 - a) + (-1 - b) = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

En définitive, par définition de la tangence d'un cercle à Γ :

$$\Sigma \text{ et } \Gamma \text{ sont tangents en } M_1 \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2} \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2}|a+1| \\ b = a. \end{cases}$$



Le cercle Ω pour quelques valeurs de a, dans le cas de tangence en M_{-1}.

(b) En tant que cercle de centre Ω de coordonnées (a,b) et de rayon r, Σ admet pour équation cartésienne $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, ce qui, sous les conditions précédentes, s'écrit encore :

$$(x-a)^2+(y-a)^2 = 2(a+1)^2.$$

On obtient une équation de la forme $f_a(x,y)=0$ en posant $f_a(x,y)=(x-a)^2+(y-a)^2-2(a+1)^2$.

(c) Posons $h=t+1$, de sorte que h tend vers 0 lorsque t tend vers -1. Alors, en utilisant d'une part le développement de référence de $\frac{1}{1-X}$ et d'autre part celui de $(1+X)^\alpha$ avec $\alpha=-2$ lorsque X tend vers 0 :

$$\begin{aligned} x(t) = x(h-1) = (h-1)^2 + \frac{2}{h-1} &\underset{h\to 0}{=} 1-2h+h^2-2\left(1+h+h^2+h^3+O(h^4)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} -1-4h-h^2-2h^3+O(h^4) \\ y(t) = y(h-1) = \frac{1}{(h-1)^2}+2(h-1) &\underset{h\to 0}{=} -2+2h+\left(1+2h+3h^2+4h^3+O(h^4)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} -1+4h+3h^2+4h^3+O(h^4) \end{aligned}$$

On peut vérifier facilement en substituant puis développant qu'on obtient bien alors le développement :

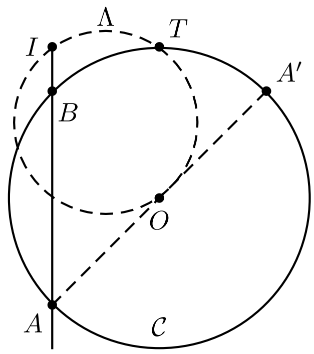
$$f_a(x(t),y(t)) \underset{t\to -1}{=} (28-4a)(t+1)^2+(28-4a)(t+1)^3+o((t+1)^3).$$

(d) D'après le développement limité obtenu ci-dessus, pour que $f_a(x(t),y(t)) = o((t+1)^3)$ au voisinage de $t=-1$, il suffit que $28-4a=0$, soit encore $a=7$. Cette condition est aussi nécessaire par unicité du développement limité.
Dans le cas $a=7$, Ω est le centre de courbure et r le rayon du cercle de courbure de Γ au point M_{-1}.

Partie III.

1. (a)

Le triangle (ABA') est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$, et le côté (AA') est un diamètre de ce cercle puisque A et A' sont symétriques par rapport à O. On en déduit que le triangle (ABA') est rectangle en B, donc les droites $(AI) = (AB)$ et $(A'B)$ sont perpendiculaires en B, donc $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{A'B} = 0$. On utilise alors la relation de Chasles et la linéarité à droite du produit scalaire :



$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}.(\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'B}) = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'}.$$

Encore avec la relation de Chasles et par bilinéarité du produit scalaire :

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = (\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA'}) = \overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{IO}.(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'})+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}.$$

Puisque O est le milieu du segment $[AA']$, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{0}$, d'une part, et, d'autre part, $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA} = -R^2$ puisque A appartient au cercle $\mathcal{C}$, de rayon R de centre 0. On a bien ainsi obtenu :

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'} = IO^2 - R^2.$$

(b) Le signe de $\sigma_{\mathcal{C}}(I)$ code la position du point I par rapport au cercle $\mathcal{C}$: sur le cercle s'il est nul, à l'intérieur du disque délimité par le disque s'il est strictement négatif, et dans le complémentaire de ce disque sinon.

(c) Par définition, outre I et O qui appartiennent à Λ, cet ensemble Λ est l'ensemble des points M tels que les droites (OM) et (IM) sont perpendiculaires en M, c'est-à-dire tels que le triangle (IOM) est rectangle en M. C'est donc le cercle de diamètre $[IO]$. Son centre est donc le milieu du segment $[IO]$, et son rayon est $IO/2$. Puisque le point T appartient à Λ, le triangle (OIT) est rectangle en T, donc, d'après le théorème de Pythagore, $OI^2 = OT^2 + IT^2$. Puisque T appartient à $\mathcal{C}$, $OT = R$. Au vu de l'expression de $\sigma_{\mathcal{C}}(I)$ obtenue à la question (a) :

$$\sigma_{\mathcal{C}}(I) = IO^2 - R^2 = IO^2 - OT^2 = IT^2.$$

2. (a) Par définition et d'après la question (a), $\sigma_{\mathcal{C}}(I) = IO^2 - R^2$ et $\sigma_{\mathcal{C}'}(I) = (IO')^2 - (R')^2$, et donc, en utilisant dans tout le calcul la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathcal{C}}(I) = \sigma_{\mathcal{C}'}(I) &\Leftrightarrow IO^2 - R^2 = (IO')^2 - (R')^2 \\
&\Leftrightarrow \overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IO} - (\overrightarrow{IO'}.\overrightarrow{IO'}) = R^2 - (R')^2 \\
\text{(Chasles)} \quad &\Leftrightarrow \overrightarrow{I\Omega}.\overrightarrow{I\Omega} + 2\overrightarrow{I\Omega}.\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{\Omega O}.\overrightarrow{\Omega O} - \left(\overrightarrow{I\Omega}.\overrightarrow{I\Omega} + 2\overrightarrow{I\Omega}.\overrightarrow{\Omega O'} + \overrightarrow{\Omega O'}.\overrightarrow{\Omega O'}\right) = R^2 - (R')^2 \\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{I\Omega}.\left(\overrightarrow{\Omega O} - \overrightarrow{\Omega O'}\right) + (\Omega O)^2 - (\Omega O')^2 = R^2 - (R')^2 \\
\text{(car } \Omega O = \Omega O'\text{)} \quad &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{I\Omega}.\overrightarrow{O'O} = R^2 - (R')^2 \\
&\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{\Omega I} = R^2 - (R')^2.
\end{aligned}$$

(b) De l'hypothèse que I_1 et I_2 appartiennent à Δ, on déduit d'après la question précédente $2\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{\Omega I_1} = R^2 - (R')^2 = 2\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{\Omega I_2}$, et donc :

$$0 = 2\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{\Omega I_1} - 2\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{\Omega I_2} = 2\overrightarrow{OO'}.(\overrightarrow{\Omega I_1} - \overrightarrow{\Omega I_2}) = 2\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{I_2 I_1},$$

ce dont on déduit, puisque I_1 et I_2 sont supposés distincts, que les droites (I_1I_2) et (OO') sont orthogonales. On munit la droite (OO') du repère $\left(O, \frac{\overrightarrow{OO'}}{OO'}\right)$. Les points O, Ω et O' ont alors pour abscisses respectives 0, $OO'/2$ et OO'. Cherchons l'abscisse x d'un point $I_0 \in \Delta \cap (OO')$. D'après 2$(a)$, on obtient $2OO' \times (x - OO'/2) = R^2 - (R')^2$, donc :

$$x = \frac{OO'}{2} + \frac{R^2 - (R')^2}{2 \times OO'}.$$

On obtient bien ainsi un unique point d'intersection entre Δ et (OO'), qui est le point image de O par la translation de vecteur $\left(\frac{1}{2} + \frac{R^2-(R')^2}{2\times(OO')^2}\right)\overrightarrow{OO'}$.
D'après les point (i) et (ii) de cette question, tous les points de Δ appartiennent à la perpendiculaire à (OO') en I_0. Réciproquement, soit I un point de cette perpendiculaire. Alors (I_0I) est perpendiculaire à (OO') donc $\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{I_0I} = 0$, donc :

$$2\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{\Omega I} = 2\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{\Omega I_0} + 2\overrightarrow{OO'}.\overrightarrow{I_0I} = R^2 - (R')^2,$$

et donc $I \in \Delta$. Ainsi, Δ est la perpendiculaire à (OO') en I_0.

(c) Si les deux cercles ont le même rayon, alors le point I_0 est simplement l'image de O par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{OO'}$, donc le milieu du segment $[OO']$, donc est égal à Ω, et la droite Δ est la perpendiculaire à (OO') en Ω.
Supposons maintenant que les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents extérieurement. Alors $OO' = R+R'$ et le point I_0 est l'image de O par la translation de vecteur :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{R^2-(R')^2}{2OO'^2}\right)\overrightarrow{OO'} = \frac{R+R'+R-R'}{2OO'}\overrightarrow{OO'} = R\frac{\overrightarrow{OO'}}{OO'}.$$

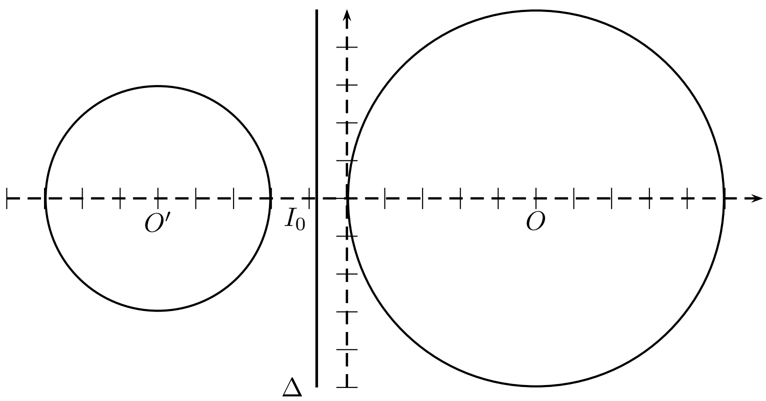
Il s'agit donc du point de tangence entre les deux cercles, et la droite Δ est la tangente commune aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en leur point de tangence.
Dans le cas d'une tangence intérieure, on a la relation $OO' = |R - R'|$. Supposons par exemple $OO' = R - R'$, l'autre cas étant analogue. Alors, le point I_0 est l'image de O par la translation selon le vecteur :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{R^2-(R')^2}{2OO'^2}\right)\overrightarrow{OO'} = \frac{R-R'+R+R'}{2OO'}\overrightarrow{OO'} = R\frac{\overrightarrow{OO'}}{OO'},$$

et on retrouve le même résultat.
Dans le cas où les deux cercles sont sécants, on vérifie que la droite Δ est la droite reliant les deux points d'intersection J_1 et J_2 des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. En effet, ces deux points sont bien symétriques par rapport à (OO'), donc la droite (J_1J_2) est perpendiculaire à (OO') d'une part. Et, d'autre part, en notant H le projeté orthogonal de J_1 sur (OO'), le théorème de Pythagore dans le triangle (OJ_1H) rectangle en J_1 donne :

$$\sigma_{\mathcal{C}}(J_1) = J_1O^2 - R^2 = J_1H^2,$$

et on obtient par un calcul analogue la même valeur pour $\sigma_{\mathcal{C}'}(J_1)$, ce qui montre $J_1 \in \Delta$. En tant que droite perpendiculaire à (OO') contenant J_1, la droite Δ est bien égale à (J_1J_2).



3. (a) Notons O le centre du cercle $\mathcal{C}$, et R son rayon. D'après la question 1(a) appliquée à la droite (AB), $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = IO^2 - R^2 = \sigma_{\mathcal{C}}(I)$. D'après l'hypothèse $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID} = \sigma_{\mathcal{C}}(I)$. Or, d'après la question 1(a) appliquée cette fois à la droite (IC), $\sigma_{\mathcal{C}}(I) = \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC'}$, où C' est le deuxième point d'intersection de (IC) avec le cercle $\mathcal{C}$ ($C = C'$ en cas de tangence). Ainsi, $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{IC'}$, et donc, les points I, C, D et C' étant alignés, $\overline{ID} = \overline{IC'}$, ce dont on déduit $D = C'$: le point D appartient bien au cercle $\mathcal{C}$.

(b) On connaît la relation :

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}.$$

Or, $\|\overrightarrow{u}\|^2 = |z|^2$, $\|\overrightarrow{v}\|^2 = |z'|^2$ et $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = |z+z'|^2$, donc :

$$2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |z+z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2 = (z+z')(\overline{z+z'}) - |z|^2 - |z'|^2 = z\overline{z'} + z'\overline{z} = z\overline{z'} + \overline{z'\overline{z}} = 2\mathrm{Re}\,(z\overline{z'}),$$

et donc :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \mathrm{Re}\,(z\overline{z'}).$$

(c) Les vecteurs $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{ID}$ ont respectivement pour affixes $4+8i = 4(1+2i)$, $7+14i = 7(1+2i)$, $6+2i = 2(3+i)$ et $21+7i = 7(3+i)$. Au vu des colinéarités deux à deux de ces vecteurs, les points I, A et B d'une part, et I, C et D d'autre part sont alignés, et :

$$\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 28|1+2i|^2 = 140, \quad \overrightarrow{IC}.\overrightarrow{ID} = 14|3+i|^2 = 140.$$

Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de la question $3(a)$ pour déduire de ce qui précède que le point D appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC), donc les points A, B, C et D sont cocycliques.

Partie IV.

1. (a). Soit $x \in \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. Alors $f(x) = \lambda x$, donc $f^2(x) = f(f(x)) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$, donc $(f^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$, donc $x \in \ker(f^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_E)$. On a bien vérifié l'inclusion $\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \subset \ker(f^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_E)$. Soit alors λ une valeur propre de f. On en déduit que $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ n'est pas réduit au vecteur nul, donc, d'après le calcul précédent, il en est de même de $\ker(f^2 - \lambda^2 \mathrm{Id}_E)$, donc λ^2 est valeur propre de f^2. On a ainsi prouvé que tout carré d'une valeur propre de f est valeur propre de f^2.

(b) En appliquant le résultat de la question (a) avec $\lambda = 0$, on obtient $\ker(f) \subset \ker(f^2)$, donc $\dim \ker(f) \leq \dim \ker(f^2)$. Pour obtenir l'inégalité demandée, on va prouve que l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ est stricte.
D'après l'hypothèse $\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) \neq \{0\}$, il existe un vecteur x non nul dans l'intersection $\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$. Ainsi, $f(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $f(y) = x$. Mais alors $f^2(y) = f(x) = 0$, donc $y \in \ker(f^2)$, et, puisque $x = f(y)$ est non nul, $y \notin \ker(f)$. Ceci prouve bien que l'inclusion $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ est stricte, donc l'inégalité entre les dimensions est stricte : $\dim \ker(f) < \dim \ker(f^2)$. Puisque ces dimensions sont entières :

$$\dim \ker(f) \leq 1 + \dim \ker(f^2).$$

(c) Par définition, $P_f(X) = \det(X\mathrm{Id}_E - f)$ et $P_{f^2}(X^2) = \det(X^2 \mathrm{Id}_E - f^2)$. Or, pour tout $u \in E$:

$$\begin{aligned}(X\mathrm{Id}_E - f) \circ (X\mathrm{Id}_E + f)(u) = (X\mathrm{Id}_E - f)\,[Xu + f(u)] &= X(Xu + f(u)) - f(Xu + f(u)) \\ &= X^2 u + Xf(u) - Xf(u) - f^2(u) \\ &= (X^2 \mathrm{Id}_E - f^2)(u),\end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité $(X\mathrm{Id}_E - f) \circ (X\mathrm{Id}_E + f) = (X^2 \mathrm{Id}_E - f^2)$. Le déterminant d'une composée étant le produit des déterminants :

$$P_{f^2}(X^2) = \det(X^2 \mathrm{Id}_E - f^2) = \det(X\mathrm{Id}_E - f)\det(X\mathrm{Id}_E + f) = P_f(X)\det(X\mathrm{Id}_E + f).$$

Enfin, l'espace E étant de dimension d, $\det(X\mathrm{Id}_E + f) = (-1)^d \det((-X)\mathrm{Id}_E - f) = (-1)^d P_f(-X)$, ce qui amène à :

$$P_{f^2}(X^2) = (-1)^d P_f(X) P_f(-X).$$

2. (a) Pour chaque polynôme P de $\mathbf{R}_n[X]$, l'expression de $f(P)$ montre qu'il s'agit d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, donc d'un élément de $\mathbf{R}_n[X]$ puisque $n \geq 3$. L'application f est donc définie sur E à valeurs dans E. Vérifions sa linéarité. Il suffit pour cela de savoir que chaque application d'évaluation $P \mapsto P(a)$ est linéaire, et d'utiliser les règles de distributivité dans $\mathbf{R}_n[X]$.
Écrivons $f(P)$ dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$:

$$f(P) = (P(0) + P(1))\,X^3 + (P(1) + P(-1))\,X^2 - (P(0) + P(-1))\,X + P(1) + P(-1). \tag{1}$$

(b) Puisque f est linéaire, l'image de f est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_3[X]$, qui est de dimension 4. De plus, pour tout $P \in E$, d'après l'identité (**??**), les termes de degré 0 et 2 de $f(P)$ sont égaux. Ainsi, $\mathrm{Im}\,(f)$ est un sous-espace du sous-espace de E engendré par X^3, X et $1 + X^2$: $\mathrm{Vect}\,(X^3, X, 1 + X^2)$. De plus, $f(X) = X^3 + X \in \mathrm{Im}\,(f)$, $f(1 - X^2) = X^3 - X \in \mathrm{Im}\,(f)$, donc X^3 et X appartiennent à $\mathrm{Im}\,(f)$ en tant que

combinaisons linéaires des deux vecteurs précédents ; enfin, $f(1) = 2X^3 + 2X^2 - 2X + 2$, donc, puisque X^3et X appartiennent aussi à $\mathrm{Im}\,(f)$, c'est encore le cas de $2(X^2+1)$ donc de X^2+1. En définitive, $\mathrm{Im}\,(f)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}_n[X]$ engendré par (X^3, X^2+1, X), et il est de dimension 3.
La formule du rang assure alors que $\ker(f)$ est de dimension $\dim E - \dim \mathrm{Im}\,(f) = n-2$.
En exploitant à nouveau l'expression **??**, par liberté de la famille $(1, X, X^2, X^3)$, on obtient l'équivalence, pour $P \in E$:

$$P \in \ker(f) \Leftrightarrow \begin{cases} P(0)+P(1)=0 & L_1 \\ P(1)+P(-1)=0 & L_2 \\ P(0)+P(-1)=0 & L_3 \\ P(1)+P(-1)=0 & L_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(1)=-P(0) & L_1 \\ P(-1)=-P(0) & L_3 \\ -2P(0)=0 & L_2=L_4 \end{cases} \Leftrightarrow P(0)=P(1)=P(-1).$$

Ainsi, le noyau de f est l'ensemble des polynômes de $\mathbf{R}_n[X]$ qui admettent -1, 0 et 1 comme racines. On peut savoir (ou non), qu'il s'agit de l'ensemble des multiples du polynôme $X(X-1)(X+1)$.

(c) L'endomorphisme f n'est pas injectif, puisque le polynôme non nul X par exemple appartient à son noyau. Il n'est pas surjectif puisque $\dim \mathrm{Im}\,(f) = 3 < \dim E = n+1$ d'après la question (b). On peut aussi déduire du résultat de la question (b) que $\mathrm{Im}\,(f)$ ne contient pas de polynôme constant non nul.

(d) Puisque f n'est pas injectif, il admet 0 comme valeur propre. La dimension du sous-espace propre associé à 0 est, d'après la question b, égale à $n-2$, donc la multiplicité de 0 en tant que valeur propre de f est supérieure ou égale à $n-2$.

(e) Calculons $f(Q_1)$ et $f(Q_2)$.

$$\begin{aligned} f(Q_1) &= (X^2-X+1)\times 8 + (X^3-X)\times 4 + (X^3+X^2+1)\times 8 = 12X^3+16X^2-12X+16 = 4Q_1(X), \\ f(Q_2) &= (X^2-X+1)\times(-2) + (X^3-X)\times 0 + (X^3+X^2+1)\times 2 = 2X^3+2X = 2Q_2(X). \end{aligned}$$

Les polynômes Q_1 et Q_2 étant non nuls, ces relations montrent que ce sont des vecteurs propres de f associés respectivement aux valeurs propres 4 et 2.

(f) D'après les résultats de la question (b), le polynôme X^3-X appartient à $\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(f)$, ce qui montre que la relation $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}\,(f) = E$ n'est pas satisfaite.

(g) D'après la question $1(a)$, tout carré d'une valeur propre de f est valeur propre de f^2. Puisque 0, 2 et 4 sont valeurs propres de f, 0, 4 et 16 sont des valeurs propres de f^2. De plus, d'après la question $2(f)$, $\ker(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) \neq \{0\}$, et donc, d'après la question $1(b)$, $\dim\ker(f^2) \geq \dim\ker(f) + 1 = n-1$. Les sous-espaces propres de f^2 associés à 4 et 16 étant de dimension au moins 1, la somme des dimensions des sous-espaces propres de f^2 est supérieure ou égale à $n-1+1+1 = n+1 = \dim(E)$. On en déduit que f^2 est diagonalisable, et n'admet aucune autre valeur propre que 0, 4 et 16. De plus :

$$\dim\ker(f^2) = n-1, \quad \dim\ker(f^2 - 4\mathrm{Id}_E) = 1, \quad \dim\ker(f^2 - 16\mathrm{Id}_E) = 1.$$

(h) Puisque f^2 est diagonalisable, le polynôme caractéristique $P_{f^2}(X)$ est scindé, et, au vu des dimensions des sous-espaces propres :

$$P_{f^2}(X) = X^{n-1}(X-4)(X-16).$$

Ainsi, $P_{f^2}(X^2) = X^{2n-2}(X^2-4)(X^2-16)$, et donc, en utilisant $1(c)$:

$$P_f(X)P_f(-X) = (-1)^n X^{2n-2}(-2)(X+2)(X-4)(X+4).$$

Le polynôme caractéristique $P_f(X)$ divise donc $(-1)^n X^{2n-2}(-2)(X+2)(X-4)(X+4)$, qui est un polynôme scindé. Ainsi, $P_f(X)$ est scindé, donc f est trigonalisable.
Montrons que f n'est pas diagonalisable en procédant par l'absurde : si $f$est diagonalisable, alors il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour f. Puisque $\ker(f)$ est de dimension $n-2$, on peut choisir une telle base $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que $f(P_i) = 0$ pour $i \leq n-3$ et $f(P_i) = \lambda_i P_i$ pour $i \geq n-2$ avec λ_i valeur propre non nulle de f. Mais alors, $(P_i)_{0\leq i\leq n}$ est encore une base de vecteurs propres pour f^2 : les valeurs propres associées sont 0 pour $i \leq n-3$ et $\lambda_i^2 \neq 0$ pour $i \geq n-2$, donc $\dim\ker(f^2) = n-2$, ce qui est en contradiction avec le résultat de la question (g). On a ainsi établi que f n'est pas diagonalisable.
On sait déjà que 0, 2 et 4 sont valeurs propres de f, la dimension du sous-espace propre associé à 0 est $n-2$.

Si f admettait une autre valeur propre, la somme des dimensions des sous-espaces propres serait supérieure ou égale à $n+1$, ce dont on pourrait déduire que f est diagonalisable. Ainsi, les seules valeurs propres de f sont 0, 2 et 4, et les dimensions des sous-espaces propres sont pour la même raison (non diagonalisabilité de f) $n-2$, 1 et 1. Le sous-espace propre associé à 0 est l'ensemble des multiples de $X(X-1)(X+1)$, le sous-espace propre associé à 2 est la droite vectorielle engendrée par Q_2, et celui associé à 4 est la droite vectorielle engendrée par Q_1.