Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

099

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

À rendre en fin d'épreuve avec la copie une feuille de papier millimétré

Tournez la page S.V.P.

Les trois parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère le point A de coordonnées $(a,\,b)$, où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
À chaque point A du plan, on associe la courbe Γ_A ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 - at \\ y(t) = t^3 - 3t^2 - bt \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

1. **Étude de Γ_A dans le cas où $a = b = 9$.**
   (a) Montrer que Γ_A possède un axe de symétrie que l'on précisera. On étudiera donc x et y sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Étudier les variations de x et de y ; on consignera les résultats dans un tableau de variations en précisant les tangentes verticales, horizontales et la tangente au point de paramètre 0.
   (c) Montrer que Γ_A possède un point double que l'on précisera. Déterminer l'angle formé par les deux tangentes à Γ_A au point double.
   (d) Etudier la branche infinie de la restriction de Γ_A à $\mathbb{R}^+$.
   (e) Tracer Γ_A.
2. Calculer l'aire de la boucle formée par Γ_A.
3. **On revient au cas général.**
   (a) Montrer que la courbe Γ_A possède un point stationnaire si et seulement si A appartient à une courbe $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation.
   (b) Montrer que $\mathcal{P}$ est une conique dont on précisera les éléments caractéristiques. Tracer $\mathcal{P}$.

Partie II

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathbb{R}^3$, et A, B, C trois points non alignés de ce plan. On suppose que le triangle ABC est direct, et n'a que des angles aigus. On note :

$$a = BC \quad , \quad b = AC \quad , \quad c = AB$$

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), et on note $h = AH$.
$\widehat{A}$ désigne l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, $\widehat{B}$ l'angle géométrique $\widehat{CBA}$, et $\widehat{C}$ l'angle géométrique $\widehat{ACB}$.

Pour cet exercice, le tracé d'un dessin sur la copie sera apprécié.

1. Donner la relation entre $\sin\widehat{C}$, h et b.
2. Rappeler la formule donnant l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC en fonction de a et h.
3. Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de a, b et $\sin\widehat{C}$.

4. Montrer que : $\dfrac{\sin \widehat{C}}{c} = \dfrac{\sin \widehat{B}}{b} = \dfrac{\sin \widehat{A}}{a}$.
5. Comparer $\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$, $\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}\right\|$ et $\det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right)$. Donner une interprétation en termes d'aires du résultat obtenu.
6. Exprimer AB^2 en fonction de a, b et $\cos \widehat{C}$.
7. Retrouver le résultat de la question 6. à l'aide du théorème de Pythagore.

Partie III

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Id_E désigne l'application identité de E.

1. (a) Montrer que $\dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im} f^2 = \dim \ker f \cap \operatorname{Im} f$.
   (on pourra considérer la restriction de f à $\operatorname{Im} f$: $\operatorname{Im} f \to E$, $x \mapsto f(x)$).
   (b) Montrer que $\dim \ker f^2 - \dim \ker f = \dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Im} f^2$.
   (c) En déduire que $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ si et seulement si $\ker f^2 = \ker f$.
   (d) Montrer que $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ si et seulement si $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.
2. On suppose désormais que $f^3 = Id_E$.
   (a) Montrer que $\operatorname{Im}(f - Id_E) \subset \ker(f^2 + f + Id_E)$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Im}(f - Id_E) \cap \ker(f - Id_E) = \{0\}$.
   (c) Montrer que $E = \ker(f^2 + f + Id_E) \oplus \ker(f - Id_E)$.
   (d) On suppose qu'il existe un vecteur non nul x dans $\operatorname{Im}(f - Id_E)$. Montrer que $f(x)$ appartient à $\operatorname{Im}(f - Id_E)$ et que la famille $(x,\ f(x))$ est libre.
3. On suppose que $\dim E = 3$, $f \neq \mathrm{Id}_E$, et $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
   (a) Démontrer que $\dim \ker(f - \mathrm{Id}_E) = 1$.
   (b) f est-elle diagonalisable ?
   (c) Donner un exemple de tel endomorphisme f (on pourra donner sa matrice dans la base canonique).

La partie II mêle de la géométrie élémentaire du plan et de la géométrie vectorielle. Les dernières questions permettent d'obtenir le théorème d'Al-Kashi, ou « loi des cosinus », qui relie, dans un triangle la longueur d'un côté à celles des deux autres et au cosinus de l'angle formé par ces deux côtés, et généralise le théorème de Pythagore aux triangles non rectangles.