Partie I

1. Étude de Γ_A dans le cas où $a = b = 9$. $\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 - 9t \\ y(t) = t^3 - 3t^2 - 9t \end{cases}$

   a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x(-t) = -t^3 + 3t^2 + 9t = -y(t) \\ y(-t) = -t^3 - 3t^2 + 9t = -x(t) \end{cases}$

   Donc $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à la droite d'équation $y = -x$ et $\boxed{\Delta : y = -x \text{ est axe de symétrie de } \Gamma_A}$

   b) x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

   $\begin{cases} x'(t) = 3t^2 + 6t - 9 = 3(t^2 + 2t - 3) \\ y'(t) = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t^2 - 2t - 3) \end{cases}$ recherche des racines au brouillon ! rédaction :

   $t^2 + 2t - 3$ binôme ayant pour racines 1 et -3 d'où son signe

   $t^2 - 2t - 3$ binôme ayant pour racines -1 et 3 d'où son signe

   En $+\infty$: $x(t) = t^3 + 3t^2 - 9t = t^3(1 + 3/t - 9/t^2) \to +\infty$ et $y(t) \to +\infty$

t	0		1		3		$+\infty$
$x'(t)$	-9	$-$	0	$+$		$+$	
$x(t)$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	27	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\searrow$	-11	$\searrow$	-27	$\nearrow$	
$y'(t)$	-9	$-$		$-$	0	$+$	
$m(t)$	1		∞		0		

   tangentes horizontale en $t = 3$, verticale en $t = 1$ et pente $m(0) = \dfrac{y'(0)}{x'(0)} = 1$ en $t = 0$

   c) $M(t)$ est un point double s'il existe $\tau \neq t$ tel que $M(t) = M(\tau) \iff \begin{cases} x(t) = x(\tau) \\ y(t) = y(\tau) \end{cases}$

   $\iff \begin{cases} t^3 + 3t^2 - 9t = \tau^3 + 3\tau^2 - 9\tau \\ t^3 - 3t^2 - 9t = \tau^3 - 3\tau^2 - 9\tau \end{cases}$ et avec $L_2 - L_1 \to L_2$

   $\iff (1) \begin{cases} t^3 + 3t^2 - 9t = \tau^3 + 3\tau^2 - 9\tau \\ -6t^2 = -6\tau^2 \end{cases}$ et $L_2 \iff t = \pm\tau \iff \tau = -t$

   $(1) \iff \begin{cases} 2t^3 - 18t = 0 \\ \tau = -t \end{cases}$ et $L_1 \iff 2t(t^2 - 9) = 0$

   et comme pour $t = 0$, on a $-t = t$, ce n'est pas le paramètre d'un point double.

   Donc $\boxed{\text{le seul point double est } M(3) = M(-3) \text{ de coordonnées } (27, -27)}$ tangente horizontale pour $t = 3$ et par symétrie, tangente verticale pour $t = -3$

   $\boxed{\text{L'angle entre les deux tangentes est donc droit.}}$

   d) En $+\infty$:

   $$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t^3 - 3t^2 - 9t}{t^3 + 3t^2 - 9} = \frac{t^3}{t^3}\frac{1 - 3/t - 9/t^2}{1 + 3/t - 9/t^2} \to 1 \text{ et}$$
   $$y(t) - 1x(t) = -6t^2 \to -\infty$$

   $\boxed{\text{Il y a donc une branche parabolique de direction } y = x}$ en $t \to +\infty$ (la courbe étant en dessous de cette direction)

   e) Echelle : 1 cm pour 10, on place la tangente à l'origine, le point $(27, -27)$ avec tangente horizontale et verticale, les points $(-5, -11)$ tangente verticale et $(5, 11)$ tangente horizontale par symétrie, et on fait partir la branche infinie dans la direction $y = x$

2. L'aire de la boucle formée par Γ_A est donnée par Green Riemann :
Courbe fermée C^1 dans le sens direct.$\mathcal{A} = \int_{-} xdy$ avec $y(t) = t^3 - 3t^2 - 9t$ et $dy = (3t^2 - 6t - 9)\, dt$ donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-3}^{3} \left(t^3 + 3t^2 - 9t\right)\left(3t^2 - 6t - 9\right) dt \\ &= \int_{-3}^{3} 3t^5 + 3t^4 - 54t^3 + 27t^2 + 81t\ dt \\ &= \left[\frac{3}{6}t^6 + \frac{3}{5}t^5 - \frac{54}{4}t^4 + \frac{27}{3}t^3 + \frac{81}{2}t^2\right]_{-3}^{3} \\ &= 0 + 2\frac{3}{5}3^5 + 2\frac{27}{3}3^3 = 2 \times 3^5\left(\frac{3}{5} + 1\right) \\ &= \frac{2^4 \times 3^5}{5}\end{aligned}$$

3. <u>On revient au cas général.</u> $\begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 - at \\ y(t) = t^3 - 3t^2 - bt \end{cases}$

   a) Un point stationnaire est un point en lequel la vitesse s'annule :
   $\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t^2 + 6t - a = 0 \\ 3t^2 - 6t - b = 0 \end{cases}$ et avec $L_2 - L_1 \to L_2$
   $\iff \begin{cases} 3t^2 + 6t - a = 0 \\ -12t - b + a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\left(\dfrac{a-b}{12}\right)^2 + 6\left(\dfrac{a-b}{12}\right) - a = 0 \\ t = \dfrac{a-b}{12} \end{cases}$
   Donc t existe $\iff 3(a-b)^2 + 6 \times 12(a-b) - 144a = 0 \iff \boxed{(a-b)^2 - 24(a+b) = 0 : \mathcal{P}}$

   b) $\mathcal{P} : a^2 - 2ab - 24a + b^2 - 24b = 0 : \mathcal{P}$
   est une équation de conique (non vide car continent l'origine.)
   On recherche un centre en annulant le gradient :
   $\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial a} : 2a - 2b - 24 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial b} : -2a + 2b - 24 = 0 \end{cases}$ et $L_1 + L_2 \iff 48 = 0$
   La conique n'a pas de centre donc $\mathcal{P}$ est une parabole.
   La matrice associé à la forme quadratique est $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = H$
   On remarque que $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ donc 0 est valeur propre associé à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et 2 est valeur propreassocié à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   et $\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base orthonormée donc avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ on a
   $$\boxed{H = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}{}^tP}$$
   Avec (a, b) les coordonnées dans la base initiale et (x, y) celles dans $\mathcal{C}$ on a (formule de changment de base)
   $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} a + b \\ a - b \end{pmatrix}$donc

$\mathcal{P} : (a-b)^2 - 24(a+b) = 0$ est plus sympatique pour le changement de base
$\iff 2y^2 + \sqrt{2}24x = 0 \iff y^2 = 12\sqrt{2}x$ parabole d'axe Oy ($\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{i}-\vec{j}\right)$ dans le repère initial) de sommet O et de paramètre $6\sqrt{2}$
Tracer la tangente à l'origine, placer le foyer à $d = 3\sqrt{2}$ du sommet

Partie II

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathbb{R}^3$, et A, B, C trois points non alignés de ce plan. On suppose que le triangle ABC est direct, et n'a que des angles aigus. On note :

$$a = BC \quad , \quad b = AC \quad , \quad c = AB$$

On désigne par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC), et on note $h = AH$.
$\widehat{A}$ désigne l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, $\widehat{B}$ l'angle géométrique $\widehat{CBA}$, et $\widehat{C}$ l'angle géométrique $\widehat{ACB}$.
Pour cet exercice, le tracé d'un dessin sur la copie sera apprécié.

1. Donner la relation entre $\sin\left(\widehat{C}\right)$, h et b.

   Dans le triangle CHA rectangle en H, pour l'angle $\widehat{C}$, l'hypoténuse est $CA = b$ et le coté opposé est $AH = h$ donc le sius de l'angle est $\boxed{\sin\left(\widehat{C}\right) = \dfrac{h}{b}}$

2. Rappeler la formule donnant l'aire $\mathcal{A}$ du triangle $\widehat{ABC}$ en fonction de a et h.
   L'aire d'un triangle est $\dfrac{1}{2}$ base$\times$ hauteur avec ici base$= CB = a$ et hauteur$= AH = h$ donc $\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ah}$

3. et en tirant h de l'expression précédente : $h = b\sin\left(\widehat{C}\right)$ on obtient $\boxed{\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{C}\right)}$

4. En inversant les rôles, on obtient de même $\mathcal{A} = \dfrac{1}{2}ac\sin\left(\widehat{B}\right) = \dfrac{1}{2}bc\sin\left(\widehat{A}\right) = \dfrac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{C}\right)$
   et en divisant par $abc \neq 0$ on obtient
   $\boxed{\dfrac{\sin\left(\widehat{A}\right)}{a} = \dfrac{\sin\left(\widehat{B}\right)}{b} = \dfrac{\sin\left(\widehat{C}\right)}{c}}$

5. On demande **ensuite** d'interprèter en terme d'aire, on ne l'utilise donc pas ici.
   $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \wedge \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{HC}$ et comme $\overrightarrow{BC} // \overrightarrow{HC}$
   $= \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}$ donc $\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}\right\|$
   det $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right)$ détermiant de deux vecteurs dans l'espace .... hum hum, ce n'est pas défni !
   On doit comprendre que c'est la restriction du déterminant au plan orienté de sorte que le triangle ABC soit direct.
   det $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) =$ det $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)$ et $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}$ est indirect.
   $\boxed{\left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AH}\right\| = -\det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) \text{ aire du rectangle défini par } \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}}$

6. $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ et avec $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$
   $\boxed{AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\widehat{C}\right)}$.

7. Dans le triangle ABH rectangle en H : $HB^2 + HA^2 = AB^2$
avec $HA^2 = h^2 = b^2 \sin\left(\widehat{C}\right)^2$
et comme le point $H \in [B, C]$ on a donc $BH = BC - HC = a - b\cos\left(\widehat{C}\right)$
d'où $BH^2 = a^2 + b^2\cos\left(\widehat{C}\right)^2 - 2ab\cos\left(\widehat{C}\right)$ et finalement

$$\begin{aligned} AB^2 &= b^2 \sin\left(\widehat{C}\right)^2 + a^2 + b^2\cos\left(\widehat{C}\right)^2 - 2ab\cos\left(\widehat{C}\right) \\ &= a^2 + b^2\left(\sin\left(\widehat{C}\right)^2 + \cos\left(\widehat{C}\right)^2\right) - 2ab\cos\left(\widehat{C}\right) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\widehat{C}\right) \end{aligned}$$

Partie III

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Id_E désigne l'application identité de E.

1. a) Montrer que $\dim \mathrm{Im}\, f - \dim \mathrm{Im}\, f^2 = \dim \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$.
   On applique le théorème du rang à $f_{|\mathrm{Im}(f)}$ (car $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension finie)
   L'ensemble de départ est $F = \mathrm{Im}\,(f)$
   $\dim(F) = \dim \mathrm{Im}\left(f_{|\mathrm{Im}(f)}\right) + \dim\left(\ker f_{|\mathrm{Im}(f)}\right)$
   $\ker\left(f_{|\mathrm{Im}(f)}\right) = \{u \in \mathrm{Im}\,(f)\ /\ f(u) = 0\} = \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(f)$
   et $\mathrm{Im}\left(f_{|\mathrm{Im}(f)}\right) = \{f(u)\ /\ u \in \mathrm{Im}\,(f)\} = \{f(u)\ /\ u = f(v),\ v \in E\} = \{f^2(v)\ /\ v \in E\}$
   Donc $\mathrm{Im}\left(f_{|\mathrm{Im}(f)}\right) = \mathrm{Im}\,(f^2)$
   $\boxed{\dim \mathrm{Im}\, f = \dim\, (\ker f \cap \mathrm{Im}\, f) + \dim\, (\mathrm{Im}\, f^2)}$

   b) On applique le théorème du rang à f et à f^2 :
   $\dim(E) = \dim \mathrm{Im}\,(f) + \dim(\ker f)$ et $\dim(E) = \dim \mathrm{Im}\,(f^2) + \dim(\ker f^2)$ et on fait la différence, d'où
   $\boxed{\dim(\ker f^2) - \dim(\ker f) = \dim(\mathrm{Im}\, f) - \dim(\mathrm{Im}\, f^2)}$

   c) En déduire que $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$ si et seulement si $\ker f^2 = \ker f$.
   On remarque d'abord que $\mathrm{Im}\,(f^2) \subset \mathrm{Im}\,(f)$ en effet :
   Si $u \in \mathrm{Im}\,(f^2)$ alors il exsite $v \in E$ tel que $u = f^2(v) = f(f(v)) \in \mathrm{Im}\,(f)$
   et $\ker(f) \subset \ker(f^2)$ car, si $u \in \ker(f)$ alors $f(u) = 0$ donc $f^2(u) = 0$ (linéraité)
   Pour avoir l'inclusion, il faut et suffit donc d'avoir l'égalité des dimensions.
   Et comme $\dim(\ker f^2) - \dim(\ker f) = \dim(\mathrm{Im}\, f) - \dim(\mathrm{Im}\, f^2)$
   alors $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Im}\,(f^2) \Longleftrightarrow \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim(\mathrm{Im}\, f^2)$
   $\Longleftrightarrow \dim(\ker f^2) = \dim(\ker f) \Longleftrightarrow \ker f^2 = \ker f$
   Donc $\boxed{\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f \text{ si et seulement si } \ker f^2 = \ker f.}$

   d) Montrer que $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$ si et seulement si $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$
   Double implication :
   Si $E = \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$ montrons que $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$
   On a déja $\mathrm{Im}\,(f^2) \subset \mathrm{Im}\,(f)$ (ci dessus)
   Si $u \in \mathrm{Im}\,(f)$ alors il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$
   et comme $v \in \ker f \oplus \mathrm{Im}\, f$ il existe $x \in \ker(f)$ et $y = f(z) \in \mathrm{Im}\,(f)$ tel que $v = x + y$
   Donc $u = f(v) = f(x) + f(y)$ (linérité) $= f^2(z)$ car $f(x) = 0$

Finalment $u \in \operatorname{Im}(f^2)$ donc $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f^2)$ et $\underline{\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)}$

$\underline{\text{Si } \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f}$ montrons que $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

On a déjà (th du rang) $\underline{\dim(E) = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)}$

Montrons que $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset \{0\}$:

Si $u \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$ alors il existe v tel que $u = f(v)$ et $f(u) = 0$ donc $f^2(v) = 0$ et $v \in \ker(f^2)$.

Or $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ donc $\ker f^2 = \ker f$. (question c)) donc $v \in \ker(f)$ et $u = f(v) = 0$

Donc $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset \{0\}$ et $\underline{\ker f \oplus \operatorname{Im} f}$

$\underline{\text{Finalement } E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f}$

$\boxed{\text{Donc } \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f \text{ si et seulement si } E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f}$

2. On suppose désormais que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
   On peut réutiliser ici ce qui a été démontré plus haut ... à condition de vérifier les hypothèses !

   a) $\underline{\text{Soit } u \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E)}$ montrons que $u \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$
   il existe v tel que $u = (f - \mathrm{Id})(v)$
   Donc $(f^2 + f + \mathrm{Id})(u) = (f^2 + f + \mathrm{Id}) \circ (f - \mathrm{Id})(v) = (f^3 - \mathrm{Id})(v) = 0$ car f linéaire
   et $\underline{u \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)}$ donc $\boxed{\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E).}$

   b) On a $0 \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f - \mathrm{Id}_E)$.
   Soit $u \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f - \mathrm{Id}_E) = \{0\}$ alors
   on a alors $u \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ donc $f(u) - u = 0$ donc $f(u) = u$ et $f^2(u) = u$
   et $u \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ (a) donc $0 = f^2(u) + f(u) + u = 3u$ d'où $u = 0$
   $\boxed{\text{et } \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f - \mathrm{Id}_E) = \{0\}}$

   c) Comme $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f - \mathrm{Id}_E) = \{0\}$ et que $\dim \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E) + \dim \ker(f - \mathrm{Id}_E) = \dim(E)$
   Et comme $\operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$. alors
   $\underline{\dim(\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)) + \dim \ker(f - \mathrm{Id}_E) \geq \dim(E)}$
   Si $u \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \cap \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et alors $f(u) = u$ et $f^2(u) + f(u) + u = 0$ donc $3u = 0$ et $u = 0$
   donc $\underline{\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E) \subset E}$ et comme la dimension est au moins celle de E
   $\boxed{E = \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E)}$

   d) $\underline{\text{On suppose qu'il existe un vecteur non nul } x \text{ dans } \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E).}$
   Donc il existe $y \in E$ tel que $x = (f - \mathrm{Id})(y) = f(y) - y$ et $f(x) = f^2(y) - f(y)$ ... ?
   On a $y \in E = \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \oplus \cap \ker(f - \mathrm{Id}_E)$
   il existe $u \in \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ et $v \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ tels que $y = u + v$
   et $f(y) = f(u) + f(v) = f(u) + v$ car $f(v) - v = 0$
   donc $x = f(y) - y = f(u) - u$ et $\boxed{f(x) = f^2(u) - f(u) = (f - \mathrm{Id})(f(u)) \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id})}$
   <ins>Par l'absurde</ins> : Si $(x, f(x))$ est liée($x \neq 0$), il exsite α tel que $f(x) = \alpha x$ et comme $f^3 = \mathrm{Id}$ on a donc $f^3(x) = \alpha^3 x = x$
   c'est à dire $(\alpha^3 - 1)x = 0$ et comme $x \neq 0$, on a donc $\alpha = 1$ et $f(x) = x \in \ker(f - \mathrm{Id})$
   Et comme $x \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ et que $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(f - \mathrm{Id}_E)$,
   $\underline{\text{alors } x = 0}$
   $\boxed{\text{Donc la famille } (x, f(x)) \text{ est libre.}}$

3. On suppose que $\dim E = 3$, $f \neq \mathrm{Id}_E$, et $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
   et on peut réutiliser les résultats du 2.!!!

   a)

4. On suppose que $\dim E = 3$, $f \neq \mathrm{Id}_E$, et $f^3 = \mathrm{Id}_E$.
   et on peut réutiliser les résultats du 2.!!!

   a) Comme $f \neq \mathrm{Id}_E$ alors $f - \mathrm{Id}_E \neq 0$ et il existe y tel que $x = f(y) - y \neq 0$
   Donc il existe un vecteur $x \neq 0$ dans $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$
   Donc (2d) $f(x) \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$ et $(x, f(x))$ est libre de deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})$.
   Donc $\underline{\dim(\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})) \geq 2}$ et comme $\dim \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) + \dim\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \dim(E) = 3$ alors
   $\underline{\dim\ker(f - \mathrm{Id}_E) \leq 1.}$
   Soit z un vecteur tel que $\mathcal{B} = (x, f(x), z)$ soit une base de E.
   Reagrdons la matrice de f dans cette base :
   $f(x) = 0x + 1f(x) + 0z$
   $f^2(x) = -x - f(x) + 0z$ car $x \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$
   et $f(z) = ax + bf(x) + cz$ (coordonées inconnues)
   donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et comme $f^3 = \mathrm{Id}$ on a $A^3 = I$ et $c^3 = 1$
   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & ac - b \\ -1 & 0 & a - b + bc \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$
   $$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & ac - b \\ -1 & 0 & a - b + bc \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b - a - c(b - ac) \\ 0 & 1 & c(a - b + bc) - a \\ 0 & 0 & c^3 \end{pmatrix}$$
   Donc $c = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   On cherche alors les solutions $f(u) = u$ avec $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} u = (\alpha, \beta, \gamma)$
   $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -\alpha - \beta + a\gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + b\gamma = 0 \end{cases}$ système qui a une intfinité de solution.
   Donc il existe un vecteur non nul dans $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\dim(\ker(f - \mathrm{Id}_E)) = 1$

   b) Comme $f^3 = \mathrm{Id}$, si α est valeur propre alors $\alpha^3 = 1$ donc $\alpha = 1$.
   Si f est diagonalisable alors la matrice de f dans la base de vecteur propres sera $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f = I$ et $f = \mathrm{Id}$ FAUX
   $\boxed{\text{Donc } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

   c) Le sous espace associé à 1 est de dimension 1
   et $\ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$ supplémentaire est de dimension 2
   Sur ce sous esapce, il faut un endomorphisme dont le cube est Id : rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$
   Donc f vérifiant $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ conviendra.