**Corrigé de l'épreuve Math B, Banque PT 2013**

**Nathalie Planche**

**Partie I:**

**1.(a)** La droite (OI) a pour équation $y=0$, la droite (OJ) a pour équation $x=0$, et la droite (IJ) a pour équation $x+y-1=0$, donc d'après la formule du cours donnant la distance d'un point à une droite du plan, si M est un point du plan de coordonnées (x,y): $\boxed{d(M,(OI))=|y|\ ,\ d(M,(OJ))=|x|\ , d(M,(IJ))=\dfrac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}}$

**1.(b)** $M(x,y)\in(C) \Leftrightarrow x^2+y^2+\dfrac{1}{2}(x+y-1)^2=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2+\dfrac{2}{3}xy-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{9}=0}$

**1.(c)** Nous allons réduire la forme quadratique de $\mathbb{R}^2$ définie par $q(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{2}{3}xy$

La matrice de cette forme quadratique dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ est A=$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

Son polynôme caractéristique est $P_A(X)=X^2-2X+\dfrac{8}{9}=\left(X-\dfrac{4}{3}\right)\left(X-\dfrac{2}{3}\right)$

Le spectre de A est $Sp(A)=\left\{\dfrac{4}{3}\ ;\ \dfrac{2}{3}\right\}$. Déterminons les sous espaces propres associés à ces deux valeurs propres:

On obtient facilement $Ker\left(A-\dfrac{4}{3}I_2\right)=Vect\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ , et $Ker\left(A-\dfrac{2}{3}I_2\right)=Vect\left\{\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ ;\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

En posant P=$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, on a donc $A=PDP^{-1}$, avec D=$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Soit $(\vec{I},\vec{J})$ la base de $\mathbb{R}^2$ telle que P soit la matrice de passage de $(\vec{i},\vec{j})$ à $(\vec{I},\vec{J})$.

La matrice P étant orthogonale, la base $(\vec{I},\vec{J})$ est orthonormée, et en utilisant les formules de changement de base:
$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, on a la relation: $q(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{2}{3}xy=\dfrac{4}{3}X^2+\dfrac{2}{3}Y^2$

On peut donc dire que dans le repère $(O,\vec{I},\vec{J})$:

$M(X,Y)\in(C) \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}X^2+\dfrac{2}{3}Y^2-\dfrac{2}{3}(\sqrt{2}X)+\dfrac{1}{9}=0 \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}\left(X-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{2}{3}Y^2=\dfrac{1}{18}$

En posant $\begin{cases} X' = X - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ Y' = Y \end{cases}$ , ce qui revient à se placer dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$,

où $\Omega$ est le point de coordonnées ($X = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ ; $Y = 0$), $\boxed{\text{une équation réduite de (C) est donc } \dfrac{X'^2}{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{6}}\right)^2} + \dfrac{Y'^2}{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} = 1}$

On reconnaît $\boxed{\text{une ellipse de centre } \Omega}$, de demi-petit axe $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ , de demi grand-axe $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. (attention ici le grand axe est selon l'axe des ordonnées dans le nouveau repère)

La distance entre l'origine et l'un des foyers est $c = \sqrt{\dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{24}} = \dfrac{1}{2\sqrt{6}}$, donc l'excentricité de cette ellipse est $e = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{6}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$

, d'où $\boxed{e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

**<u>1.(d)</u>**

La droite $(OI)$ a pour équation y=0 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, donc, en utilisant les formules de changement de repère définies à la question précédente, **dans le repère $(\Omega, \vec{I}, \vec{J})$, la droite $(OI)$ a pour équation $X' - Y' + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = 0$**

Déterminons l'intersection de la droite (OI) et de l'ellipse (C):

$$\begin{cases} X' - Y' - \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = 0 \\ 24X'^2 + 12Y'^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y' = X' + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ 36X'^2 + \dfrac{12}{\sqrt{2}}X' + \dfrac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y' = X' + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ \left(6X' + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X' = -\dfrac{1}{6\sqrt{2}} \\ Y' = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \end{cases}$$

L'ellipse et la droite (OI) ont donc un unique point d'intersection, le point $M_0$ de coordonnées $\begin{cases} X' = -\dfrac{1}{6\sqrt{2}} \\ Y' = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} \end{cases}$

Vérifions que la tangente à l'ellipse en ce point est bien la doite (OI):

D'après le cours, on sait qu'au point $M_0$, une équation de la tangente est :

$24\left(-\dfrac{1}{6\sqrt{2}}\right)X' + 12\left(\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)Y' = 1 \Leftrightarrow X' - Y' + \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = 0$ . C'est la droite (OI)

| Nous avons donc prouvé que (C) est tangente à la droite (OI). |
|---|

Par symétrie du problème par rapport à la 1ère bissectrice (les rôles de x et de y sont symétriques), on peut affirmer que $\boxed{\text{(C) est également tangente à la droite (OJ)}}$.

**2.(a)** La tangente à (ε) au point P de paramètre θ est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -\text{a}\sin(\theta) \\ b\cos(\theta) \end{pmatrix}$ (car ce vecteur, vecteur dérivé du vecteur position, est toujours non nul).

La droite (ON) est dirigée par le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \text{a}\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$

Ces deux droites sont parallèles $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\text{a}\sin(\theta) & \text{a}\cos(t) \\ b\cos(\theta) & b\sin(t) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \sin(\theta)\sin(t)+\cos(\theta)\cos(t)=0$ car $ab \neq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\cos(t-\theta)=0}$

**2.(b)** On suppose la condition $\cos(t-\theta)=0$ vérifiée.

L'aire du triangle ONP est égale à la moitié de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{OP}$, c'est-à-dire:

Aire(triangle ONP) = $\frac{1}{2}|Det(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{ON})| = \frac{1}{2}|ab(\sin(t)\cos(\theta)-\sin(\theta)\cos(t))| = \frac{ab}{2}|\sin(t-\theta)|$

Or $\cos(t-\theta)=0 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z},\ t-\theta = \frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow |\sin(t-\theta)|=1$

Finalement, $\boxed{\text{Aire(triangle ONP)} = \frac{ab}{2}}$

**2.(c)** La droite Δ est tangente à ε si et seulement si il existe un point de ε appartenant à Δ tel que en ce point, le vecteur tangent à ε soit aussi un vecteur directeur de Δ.

Traduisons analytiquement cette condition:

La droite Δ est tangente à ε $\Leftrightarrow \exists\ w \in \mathbb{R}$, le point $\begin{pmatrix} \text{a}\cos(w) \\ b\sin(w) \end{pmatrix}$ appartienne à ε **<u>et</u>** le vecteur $\begin{pmatrix} -\text{a}\sin(w) \\ b\cos(w) \end{pmatrix}$ dirige Δ

$$\Leftrightarrow \exists\ w \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \alpha a\cos(w)+\beta b\sin(w)+\gamma=0 \\ \beta b\cos(w)-a\alpha\sin(w)+0 \end{cases}$$

Ce système d'inconnues $(\cos(w),\sin(w))$ est un système de Cramer car son déterminant est égal à $-a^2\alpha^2-b^2\beta^2 \neq 0$, car $a\neq 0$, $b\neq 0$, $(\alpha,\beta)\neq 0$. En utilisant les formules de Cramer, on peut donc écrire:

La droite Δ est tangente à ε $\Leftrightarrow \exists\ w \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \cos(w) = \frac{-a\alpha\gamma}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2} \\ \sin(w) = \frac{-b\beta\gamma}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{-a\alpha\gamma}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}\right)^2+\left(\frac{-b\beta\gamma}{a^2\alpha^2+b^2\beta^2}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow,\ a^2\alpha^2\gamma^2+b^2\beta^2\gamma^2=(a^2\alpha^2+b^2\beta^2)^2$$

$\Leftrightarrow\ a^2\alpha^2\gamma^2 + b^2\beta^2\gamma^2 = \left(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2\right)^2$

$\Leftrightarrow\ \left(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2\right)\left(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow\ a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0 \quad car\ \ a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases} a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{cases} \quad car\ a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 \neq 0$

On a donc bien prouvé: La droite $\Delta$ est tangente à $\varepsilon$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{cases}$

**<u>2.(d)</u>** La droite (UV) a pour équation:

$$\begin{vmatrix} x - 2a\cos(u) & a\cos(v) - a\cos(u) \\ y - 2b\sin(u) & b\sin(v) - b\sin(u) \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow\ b(\sin(v) - \sin(u))x - a(\cos(v) - \cos(u))y + 2ab\sin(u - v) = 0$$

Posons $\begin{cases} \alpha = b(\sin(v) - \sin(u)) \\ \beta = -a(\cos(v) - \cos(u)) \\ \gamma = 2ab\sin(u - v) \end{cases}$

Nous allons alors utiliser le résultat établi à la question précédente:

La droite (UV) est tangente à l'ellipse $\varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 - \gamma^2 = 0 \\ \gamma \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases} a^2b^2(\sin(v) - \sin(u))^2 + a^2b^2(\cos(v) - \cos(u))^2 - 4a^2b^2\sin^2(u - v) = 0 \\ 2ab\sin(u - v) \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases} 2 - 2\cos(u - v) - 4\sin^2(u - v) = 0 \\ u \neq \pi + v[2\pi] \end{cases}$ car $a \neq 0$, $b \neq 0$ , et $u \neq v[2\pi]$ (U et V sont distincts)

$\Leftrightarrow\ \begin{cases} 2\cos^2(u - v) - \cos(u - v) - 1 = 0 \\ u \neq \pi + v[2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow\ \begin{cases} 2\cos^2(u - v) - \cos(u - v) - 1 = 0 \\ u \neq \pi + v[2\pi] \end{cases}$ Or le polynôme $2X^2 - X - 1 = 0$ admet 1 et $-\dfrac{1}{2}$ pour racines.

$\Leftrightarrow\ \begin{cases} \cos(u - v) = 1 \\ u \neq \pi + v[2\pi] \end{cases}$ ou $\begin{cases} \cos(u - v) = -\dfrac{1}{2} \\ u \neq \pi + v[2\pi] \end{cases}$

Le premier système n'a pas de solutions car $u \neq v[2\pi]$ , on peut donc énoncer:

La droite (UV) est tangente à l'ellipse $\varepsilon \Leftrightarrow \cos(u - v) = -\dfrac{1}{2}$

**<u>2.(e)</u>** Notons a, b, c les paramètres respectifs des points A, B, C sur l'ellipse $\varepsilon'$.

D'après la question précédente, la condition (AB) et (AC) sont tangentes à ε se traduit par $\begin{cases} \cos(a-b) = -\dfrac{1}{2} \\ \cos(a-c) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Montrons que (BC) est tangente à ε, ce qui revient à montrer que $\cos(b-c) = -\dfrac{1}{2}$:

$\cos(b-c) = \cos((b-a)+(a-c)) = \cos(b-a)\cos(a-c) - \sin(b-a)\sin(a-c)$

Comme $\cos(a-b) = -\dfrac{1}{2}$, il ya deux possibilités pour la valeur de sin(a-b): $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, de même pour $\sin(a-c)$

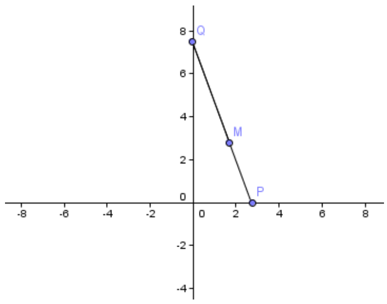
Nous avons donc les deux possibilités suivantes: $\mathbf{\cos(b-c) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1}$ ou $\mathbf{\cos(b-c) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}}$

Le premier cas est impossible car on aurait $b = c[2\pi]$, ce qui est exclu car les points B et C sont distincts.

Nous avons donc bien montré que $\boxed{\text{la droite(BC) est tangente à } \varepsilon.}$

**3.i.** Si D est une droite du plan affine, si α est un réel non nul, on appelle affinité orthogonale de base D et de rapport α l'application *f* qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{p(M)M'} = \alpha\overrightarrow{p(M)M}$ , où p désigne la projection orthogonale sur D.

**3.ii.** *Remarque personnelle: ici il est difficile de savoir si l'énoncé attend seulement un exemple de trois points M, P, Q (dessin ci-contre) vérifiant les hypothèses, ou s'il s'agit d'esquisser le lieu des points M en prenant plusieurs exemples.*




**3.iii.** . Si on note (t,0) les coordonnées du point P, (0,u) les coordonnées du point Q , alors la condition PQ = 8 se traduit par

$t^2 + u^2 = 64$, c'est-à-dire $\left(\dfrac{t}{8}\right)^2 + \left(\dfrac{u}{8}\right)^2 = 1$, donc il existe θ réel tel que $P(8\cos(\theta),0)$ et $Q(0,8\sin(\theta))$

Le point M(x,y) étant défini par la relation $\overrightarrow{PM} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{PQ}$, on a donc $\begin{cases} x - 8\cos(t) = \dfrac{3}{8}(-8\cos(t)) \\ y = \dfrac{3}{8}(8\sin(t)) \end{cases}$ ,

d'où $\boxed{M: \begin{cases} x = 5\cos(t) \\ y = 3\sin(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}}$. $\boxed{\text{L'ensemble } (\varepsilon) \text{ cherché est donc une ellipse}}$.

**Partie II:**

**1.**

- Intersection de P avec le plan d'équation $x = 0$:

Les points de cette intersection sont les points M(x,y,z) tels que $\begin{cases} x = 0 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = -y^2 \end{cases}$ C'est une $\boxed{\text{parabole}}$.

- Intersection de P avec le plan d'équation y = 0:

Les points de cette intersection sont les points M(x,y,z) tels que $\begin{cases} y = 0 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = x^2 \end{cases}$ C'est une $\boxed{\text{parabole}}$.

- Intersection de P avec le plan d'équation z = 0:

Les points de cette intersection sont les points M(x,y,z) tels que $\begin{cases} z = 0 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$ ou $\begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases}$

C'est la $\boxed{\text{réunion de deux droites sécantes}}$.

- Intersection de P avec le plan d'équation z = 1:

Les points de cette intersection sont les points M(x,y,z) tels que $\begin{cases} z = 1 \\ z = x^2 - y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$ C'est une $\boxed{\text{hyperbole}}$.

**2.** D'après le cours, on peut directement affirmer que $\boxed{\text{P est un paraboloïde hyperbolique}}$.

**3.** $M_0$ appartenant à P, on a la relation $z_0 = x_0{}^2 - y_0{}^2$

On cherche s'il existe un vecteur $\vec{u}$ non nul de coordonnées (a,b,c) tels que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, le point $M_0 + \lambda \vec{u} \in$ P.

Cette dernière condition peut aussi s'écrire:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ M_0 + \lambda \vec{u} \in \mathrm{P} \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (x_0 + \lambda a)^2 - (y_0 + \lambda b)^2 = z_0 + \lambda c$$

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda^2 (a^2 - b^2) + \lambda (2 a x_0 - 2 b y_0 - c) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2 a x_0 - 2 b y_0 - c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 2(x_0 - y_0) a \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} a = -b \\ c = 2(x_0 + y_0) a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \in Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2(x_0 - y_0) \end{pmatrix}\right\} \ ou \ \vec{u} \in Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2(x_0 + y_0) \end{pmatrix}\right\}$$

Il y a donc $\boxed{\text{deux droites qui conviennent}}$, c'est-à-dire qui passent par $M_0$ et sont incluses dans P, ce sont $\boxed{\text{les droites de vecteur directeur } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2(x_0 - y_0) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2(x_0 + y_0) \end{pmatrix}}$

**4.** Les deux droites trouvées ci-dessus sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux, ce qui se traduit par la condition ${x_0}^2 - {y_0}^2 = 0$.

Ayant de plus la relation $z_0 = {x_0}^2 - {y_0}^2$, on peut affirmer que l'ensemble des points $M_0$ de P par lesquels passent deux droites orthogonales et incluses dans P est $\left\{ M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_0 \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_0 \in \mathbb{R} \right\}$,

c'est-à-dire $\boxed{\text{la réunion des deux droites passant par l'origine et de vecteurs directeurs respectifs } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

**5.** Une représentation paramétrique de la droite D est $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{4} \end{cases}$, donc cette droite passe par le point $A\left(0,0,-\frac{1}{4}\right)$ et est dirigée par $\vec{\imath}(1,0,0)$. On utilise alors la formule du cours donnant la distance d'un point à une droite de l'espace:

Si M(x,y,z), alors $d(M,D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$, d'où après calculs $d(M,D) = \sqrt{\left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + y^2}$

De la même manière la droite D' passe par le point $B\left(0,0,\frac{1}{4}\right)$ et est dirigée par $\vec{\jmath}(0,1,0)$, donc $d(M,D') = \sqrt{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2 + x^2}$

M(x,y,z) est équidistants des droites D et D' $\Leftrightarrow \sqrt{\left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(z - \frac{1}{4}\right)^2 + x^2}$

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(z - \frac{1}{4}\right)^2 + x^2 \Leftrightarrow z = x^2 - y^2$. $\boxed{\text{Il s'agit du paraboloïde hyperbolique P}}$

**Partie III:**

**1.** Montrons que tr est une application linéaire. (c'est une propriété vue en cours qu'on nous demande de démontrer ici)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$tr(A + \lambda B) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + \lambda b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = tr(A) + \lambda tr(B)$, ce qui prouve bien $\boxed{\text{la linéarité de l'application "trace"}}$

**2.** L'application tr est à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc Im(tr) est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$.

Il est donc de dimension 0 ou 1.

Il ne peut pas être de dimension 0 (car cela signifierait que toutes les matrices sont de trace nulle, ce qui est faux en considérant par exemple la matrice identité), donc il est de dimension 1, c'est-à-dire $\boxed{Im(tr) = \mathbb{R}}$ (ce qui traduit la surjectivité de l'application tr)

D'après le théorème du rang, $dim\left(M_n(\mathbb{R})\right) = dim(Ker(tr)) + dim(Im(tr))$, donc $\boxed{dim(Ker(tr)) = n^2 - 1}$

**3.** Montrons tout d'abord que $Vect\left(I_n\right) \cap Ker(tr) = \{O\}$ (O désignant ici la matrice nulle)

Il est clair que la matrice nulle appartient à al fois à $Vect\left(I_n\right)$ et à $Ker(tr)$, montrons l'inclusion réciproque:

Soit A $\in Vect\left(I_n\right) \cap Ker(tr)$, alors $\exists \alpha \in \mathbb{R}$, $A = \alpha I_n$ et $tr(A) = 0$; or $tr(A) = n\alpha$, donc comme $n \neq 0$, $\alpha = 0$et $A = O$.

Nous avons bien montré que $\boxed{Vect\left(I_n\right) \cap Ker(tr) = \{O\}}$

De plus, nous avons la formule: $\dim(Vect\left(I_n\right) + Ker(tr)) = \dim(Vect\left(I_n\right)) + \dim(Ker(tr)) - \dim(Vect\left(I_n\right) \cap Ker(tr))$

$$= 1 + \left(n^2 - 1\right) - 0 = n^2$$

Donc $dim\left(Vect\left(I_n\right) + Ker(tr)\right) = dim\left(M_n(\mathbb{R})\right)$, et $Vect\left(I_n\right) + Ker(tr)$ est un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$, donc $\boxed{Vect\left(I_n\right) + Ker(tr) = M_n(\mathbb{R})}$

Nous avons donc bien prouvé que $\boxed{\boldsymbol{Vect\left(I_n\right) \oplus Ker(tr) = M_n(\mathbb{R})}}$

**4.** Il s'agit ici d'un résultat du cours que l'on nous demande de démontrer.

Notons $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ et $B = \left(b_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ les deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

Notons également $B = \left(c_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$, $BA = \left(d_{ij}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

On a donc, pour tous les entiers i et j compris entre 1 et n: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ et $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

On échange les lettres k et i

$tr(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}$ , donc $\boxed{tr(BA) = tr(AB)}$

**5.** Si de telles matrices A et B existent, alors on aurait $tr(AB-BA)=tr(I_n)$, d'où en utilisant les questions 1. et 4., $0=n$, ce qui est absurde. $\boxed{\text{Il n'existe donc aucunes matrices A et B de } M_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } AB-BA=I_n.}$

**6.(a)** Tout d'abord il est clair que l'application $\psi_J$ est à valeurs dans $M_n(\mathbb{R})$

Montrons maintenant sa linéarité: soit M et N deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\psi_J(M+\lambda N)=(M+\lambda N)+tr(M+\lambda N)J$

$= M+tr(M)J+\lambda N+\lambda tr(N)J$ *par linéarité de l'application trace.*

$= \psi_J(M)+\lambda\psi_J(N)$

On a bien prouvé que $\boxed{\psi_J \text{ est un endomorphisme de } M_n(\mathbb{R})}$.

**6.(b)** Supposons que $\lambda$ soit une valeur propre et M un vecteur propre associé (M est une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{R})$)

On a alors $M+tr(M)I_n=\lambda M$, d'où en prenant la trace: $tr(M)+tr(M)n=\lambda tr(M) \Leftrightarrow (\lambda-n-1)tr(M)=0$

Donc soit $tr(M)=0$, soit $\lambda=n+1$

Dans le cas où $tr(M)=0$, cherchons les valeurs propres pouvant être associées à cette matrice: on a alors $\psi_{In}(M)=\lambda M$, c'est-à-dire $M=\lambda M$, d'où $\lambda=1$ car M est non nulle.

**Les deux seules valeurs propres possibles sont donc 1 et $(n+1)$.**

Vérifions qu'effectivement ce sont bien des valeurs propres, et en même temps nous déterminerons les sous espaces propres associés:

- Montrons qu'il existe des matrices M non nulles telles que $\psi_{In}(M)=M$
  $\psi_{In}(M)=M \Leftrightarrow M+tr(M)I_n=M \Leftrightarrow tr(M)I_n=0 \Leftrightarrow tr(M)=0 \Leftrightarrow M\in Ker(tr)$
  Donc $\boxed{\text{1 est valeur propre, de sous espace propre associé } Ker(tr)}$
- Montrons qu'il existe des matrices M non nulles telles que $\psi_{In}(M)=(n+1)M$
  $\psi_{In}(M)=(n+1)M \Leftrightarrow M+tr(M)I_n=(n+1)M \Leftrightarrow M=\dfrac{tr(M)}{n}I_n \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}, M=\alpha I_n$
  Donc $\boxed{\text{(n+1) est valeur propre, de sous espace propre associé } Vect(I_n)}$

Nous avons déjà prouvé que $dim(Ker(tr))+dim(Vect(I_n))=dim(M_n(\mathbb{R}))$,

donc $\boxed{\text{l'endomorphisme } \psi_{In} \text{ est diagonalisable.}}$

**6.(c)** Soit M $\in M_n(\mathbb{R})$.

$\left((\psi_J)^2-2\psi_J+Id\right)(M)=\psi_J\left(\psi_J(M)\right)-2\psi_J(M)+M$

$= \psi_J(M + tr(M)J) - 2M - 2tr(M)J + M$

$= M + tr(M)J + tr(M)(J + tr(J)J) - M - 2tr(M)J$

$= tr(M)tr(J)J$

**<u>6.(d)</u>** Supposons que $\lambda$ soit une valeur propre et M un vecteur propre associée (M est une matrice non nulle de $M_n(\mathbb{R})$)

On a alors $M + tr(M)J = \lambda M$, d'où en prenant la trace: $tr(M) + tr(M)tr(J) = \lambda tr(M) \Leftrightarrow (\lambda - tr(J) - 1)tr(M) = 0$

Donc soit $tr(M) = 0$, soit $\lambda = tr(J) + 1$

Dans le cas où $tr(M) = 0$, cherchons les valeurs propres pouvant être associées à cette matrice: on a alors $\psi_J(M) = \lambda M$, c'est-à-dire $M = \lambda M$, d'où $\lambda = 1$ car M est non nulle.

**Les deux seules valeurs propres possibles sont donc 1 et $tr(J)+1$**

Vérifions qu'effectivement ce sont bien des valeurs propres, et en même temps nous déterminerons les sous espaces propres associés:

- Montrons qu'il existe des matrices M non nulles telles que $\psi_J(M) = M$
  $\psi_J(M) = M \Leftrightarrow M + tr(M)J = M \Leftrightarrow tr(M)J = 0 \Leftrightarrow tr(M) = 0 \Leftrightarrow M \in Ker(tr)$
  Donc $\boxed{\text{1 est valeur propre, de sous espace propre associé } Ker(tr)}$
- Supposons à présent que $tr(J) \neq 0$ (car si $tr(J) = 0$, 1 est alors la seule valeur propre)
  Montrons qu'il existe des matrices M non nulles telles que $\psi_J(M) = (tr(J) + 1)M$
  $\psi_J(M) = (tr(J) + 1)M \Leftrightarrow M + tr(M)J = (tr(J) + 1)M \Leftrightarrow M = \dfrac{tr(M)}{tr(J)} J \Leftrightarrow M \in vect(J)$
  (pour la dernière équivalence, le sens direct est évident, et réciproquement si $\exists \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha J$, alors $tr(M) = \alpha tr(J)$, donc $\alpha = \dfrac{tr(M)}{tr(J)}$, et $M = \dfrac{tr(M)}{tr(J)} J$ )
  Donc $\boxed{\text{(tr(J)+1) est valeur propre, de sous espace propre associé } Vect(J)}$

<u>Bilan:</u>

- Si $tr(J) = 0$, 1 est la seule valeur propre de $\psi_J$
- Si $tr(J) \neq 0$, 1 et $tr(J) + 1$ sont les deux valeurs propres de $\psi_J$

**<u>6.(e)</u>**

- **<u>Si $tr(J)=0$</u>**, 1 est la seule valeur propre de $\psi_J$, et le sous espace propre associé est Ker(tr), qui est de dimension $n^2 - 1 \neq n^2$, donc $\boxed{\text{l'endomorphisme } \psi_J \text{ n'est pas diagonalisable.}}$
- **<u>Si $tr(J)\neq 0$</u>**, le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est Ker(tr), le sous espace propre associé à la valeur propre $tr(J) + 1$ est $Vect(J)$ de dimension 1, donc $dim(Ker(tr)) + dim(Vect(J)) = dim\left(M_n(\mathbb{R})\right)$, donc $\boxed{\text{l'endomorphisme } \psi_J \text{ est diagonalisable.}}$