Partie 1

Conique $E_p\ :\ x^2+y^2-2pxy+2(py-x)\ =\ 0$

Le point P$(0,\alpha)$ et Q$(0,2\alpha)$

1/ p=0

a/ $E_0\ :\ x^2+y^2-2x\ =\ 0$ est le cercle de centre $(1,0)$ et de rayon 1.

b/

1ère méthode:

La tangente au cercle en un point du cercle $M_0(x_0,y_0)$ a pour équation:

$xx_0+yy_0-(x+x_0)\ =\ 0$. Elle passe par P si:$\alpha y_0-x_0\ =\ 0$

D'autre part, $x_0^2+y_0^2-2x_0\ =\ 0$ donc $\alpha^2y_0^2+y_0^2-2\alpha y_0\ =\ 0$ donc

soit $y_0\ =\ 0$ et $x_0\ =\ 0$ et la tangente est verticale, d'équation x=0,

soit $y_0\ =\ \frac{2\alpha}{\alpha^2+1}$ et $x_0\ =\ \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1}$ et la tangente a pour équation:$\begin{vmatrix} x & 0-\frac{2\alpha^2}{\alpha^2+1} \\ y-\alpha & \alpha-\frac{2\alpha}{\alpha^2+1} \end{vmatrix} = 0$

soit$\begin{vmatrix} x & -2\alpha \\ y-\alpha & \alpha^2-1 \end{vmatrix} = 0$(car $\alpha\neq 0$) $\Leftrightarrow$ $(\alpha^2-1)x+2\alpha y-2\alpha^2\ =\ 0$ qui est donc l'équation de D.

2ème méthode

Il y a une tangente évidente passant par P, c'est l'axe Oy, d'équation x=0

Une droite non verticale passant par P a une représentation paramétrique simple:

$\begin{pmatrix} 0+t \\ \alpha+kt \end{pmatrix}, t\in\mathbb{R}$. L'intersection avec le cercle doit présenter une racine double:

donc $t^2+(\alpha+kt)^2-2t\ =\ 0\ \Leftrightarrow\ (k^2+1)t^2+2(\alpha k-1)t+\alpha^2\ =\ 0$

Il y a racine double ssi:$(\alpha k-1)^2-(k^2+1)\alpha^2\ =\ 0\ \Leftrightarrow\ 2\alpha k\ =\ 1-\alpha^2$

Donc un vecteur directeur en est $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\alpha^2}{2\alpha} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2\alpha \\ 1-\alpha^2 \end{pmatrix}$ et on retrouve bien l'équation précédente.

c/ On change α en 2α, donc la droite D' a pour équation:

$(4\alpha^2-1)x+4\alpha y-8\alpha^2\ =\ 0$

d/ R vérifie le système:$\left\{\begin{matrix} (\alpha^2-1)x+2\alpha y\ =\ 2\alpha^2 \\ (4\alpha^2-1)x+4\alpha y\ =\ 8\alpha^2 \end{matrix}\right\}$

d'où$\left\{\begin{matrix} x\ =\ \frac{-8\alpha^3}{-2\alpha(2\alpha^2+1)} \\ y\ =\ \frac{-6\alpha^2}{-2\alpha(2\alpha^2+1)} \end{matrix}\right\}\ \Leftrightarrow\ \left\{\begin{matrix} x\ =\ \frac{4\alpha^2}{(2\alpha^2+1)} \\ y\ =\ \frac{3\alpha}{(2\alpha^2+1)} \end{matrix}\right\}$ car $\alpha\neq 0$

On observe que $\frac{x}{y}\ =\ \frac{4\alpha}{3}$ (y ne s'annule pas car$\alpha\neq 0$)

d'où $y\ =\ \frac{\frac{9x}{4y}}{2\left(\frac{3x}{4y}\right)^2+1}$ soit $y(9x^2+8y^2-18x)\ =\ 0$

y ne s'annulant pas, R décrit l'ellipse d'équation $9x^2+8y^2-18x\ =\ 0$

2/ On considère que la conique a une équation de la forme:

C$(M)\ =\ 0$ avec $C(M)\ =\ q(OM)+2U\bullet OM+k$

On notera f l'application symétrique qui a même matrice que q dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Si O' est un autre point du plan, on a:

$C(M) = q(O'M) + 2(f(OO') + U) + C(O')$

le vecteur U est $\begin{pmatrix} -1 \\ p \end{pmatrix}$

la matrice de la forme quadratique q est $\begin{pmatrix} 1 & -p \\ -p & 1 \end{pmatrix} = M_{B_0}(f)$

dont le déterminant est $1-p^2$, donc la conique est centrée ssi $p^2 \neq 1$, de type ellipse si $1-p^2 > 0$ et hyperbole si $1-p^2 < 0$.Si $p^2 = 1$, 0 est valeur propre d'ordre 1, l'autre valeur propre est 2 ($trace(M) = 2$) donc la conique est de type parabole éventuellement dégénérée en une deux droites parallèles.

Cas centré: f est bijective et on calcule le point O' tel que $f(OO') + U = 0$

donc $\left\{ \begin{array}{c} a-pb = 1 \\ -pa+b = -p \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \\ b = 0 \end{array} \right\}$ qui est donc le centre ω_p de la conique, qui ne dépend pas de p.

$C(O') = -1$.

Les valeurs propres sont solutions de l'équation:

$T^2 - 2T + (1-p^2) = 0$ dont les racines sont $1-p$ et $1+p$.

Un vecteur propre associé à $1-p$ vérifie:$\left\{ \begin{array}{c} pa-pb = 0 \\ -pa+pb = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow a = b$ (le cas $p = 0$ a déjà été étudié)

Un vecteur propre associé à $1+p$ vérifie:$\left\{ \begin{array}{c} -pa-pb = 0 \\ -pa-pb = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow a = -b$

Les axes de ces coniques sont les deux bissectrices des axes Ox et Oy, et ils ne dépendent pas de p.

L'équation réduite dans le repère orthonormé d'origine O' et de base associée $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est:$(1-p)X^2 + (1+p)Y^2 - 1 = 0$

Cas parabolique:

1ère méthode: on voit que, pour $p = 1$ l'équation est:$(x-y)^2 - 2(x-y) = 0$

qui donne les deux droites parallèles $x-y = 0$ et $x-y-2 = 0$

De même, pour $p = -1$ l'équation est:$(x+y)^2 - 2(x+y) = 0$

qui donne les deux droites parallèles $x+y = 0$ et $x+y-2 = 0$

2ème méthode: (quand on n'a rien vu)

On a donc $p \in \{-1,+1\}$ et $\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} = V_1$ est une base de Ker(f)

On décompose alors U dans la somme directe orthogonale $Ker(f) \oplus Im(f)$ l'objectif étant de calculer O' simplifiant l'expression f$(OO') + U$.

$U_1 = p^{\perp}_{Ker(f)}(U) = \frac{U \bullet V_1}{\|V_1\|^2} = 0$ et donc $U \in Im(f)$

Calculons alors O' tel que f$(OO') + U = 0$.

On a le système $\left\{ \begin{array}{c} a - pb = 1 \\ -pa + b = -p \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{si } p = 1, \{a - b = 1\} \\ \text{si } p = -1, \{a + b = 1\} \end{array} \right\}$

donc, on peut choisir dans tous les cas le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et, dans le repère (O', $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -p \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$), l'équation est: $2X^2 - 1 = 0$

NB: il est intéressant de noter que nous avons, avec l'ensemble des coniques $(E_p)_{p \in \mathbb{R}}$ un faisceau de coniques, engendré par les deux coniques:

E_0 : $x^2 + y^2 - 2x = 0$ cercle déjà étudié et $E_\infty : -2xy + 2y = 0 \Leftrightarrow y(-x + 1) = 0$ qui est l'équation d'une hyperbole dégénérée en ses asymptotes.

Les coniques E_p ont une équation de la forme: $E_0(M) + pE_\infty(M) = 0$

Les deux coniques "de base" ont des points communs: $(0,0), (2,0), (1,1), (1,-1)$

Ces points sont naturellement commun à toutes les coniques, en particulier aux deux droites parallèles trouvées.Du coup, en prenant comme coniques de base le cercle et les deux droites parallèles, deux axes de symétries s'imposent pour ces deux coniques, qui sont les droites parallèles aux bissectrices de Ox et Oy passant par le centre du cercle, d'où ce centre et ces axes communs à toutes les coniques du faisceau...

Partie 2

1/ Un point de Δ_1 a des coordonnées du type $\begin{pmatrix} 0 + t \\ 0 + t \\ 1 + t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

2/ M_1 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 + a \end{pmatrix}$ et $M_2 \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Un point de M_1M_2 a des coordonnées du type $\begin{pmatrix} b + t(a - b) \\ 0 + ta \\ 0 + t(1 + a) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$.

3/ Un point $\begin{pmatrix} b + t(a - b) \\ 0 + ta \\ 0 + t(1 + a) \end{pmatrix}$ de $M_1M_2 \cap \Delta_3$ doit vérifier les conditions:

$\left\{ \begin{array}{c} (2a - b)t + b = 0 \\ (2a + 1)t + 1 = 0 \end{array} \right\}$ qui ne sont compatibles que si $(2a - b) - (2a + 1)b = 0$

NB: l'existence de t tel que $t\begin{pmatrix} 2a - b \\ 2a + 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} b \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ indique que les deux vecteurs sont liés.

La condition s'écrit alors: $a(1 - b) = b$

Si $b = 1$ cette condition n'est pas réalisable et donc les droites se rencontres si et seulement si $b \neq 1$ et $a = \frac{b}{1-b}$.

4/ Une représentation paramétrique de M_1M_2 est alors: $\begin{pmatrix} b+t\left(\frac{b}{1-b}-b\right) \\ 0+t\frac{b}{1-b} \\ 0+t\left(1+\frac{b}{1-b}\right) \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$

qui se simplifie en $\begin{pmatrix} b+tb^2 \\ 0+tb \\ 0+t \end{pmatrix}$

5/

Première méthode:Une telle droite Δ' contient un point de la droite AB et un point de la droite Δ_2. On pourrait les appeler M_1 et M_2...bref cela revient à étudier les droites M_1M_2 qui rencontrent Δ_3...ce qui nous ramène à la question précédente.

Un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Delta' \Leftrightarrow \exists(b,t) \in \mathbb{R}^2 : \left\{\begin{matrix} x = b+tb^2 \\ y = tb \\ z = t \end{matrix}\right\}$

si $z \neq 0 \Leftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Delta' \Leftrightarrow \exists(b,t) \in \mathbb{R}^2 : \left\{\begin{matrix} t = z \\ b = \frac{y}{z} \\ x = \frac{y}{z}+z(\frac{y}{z})^2 \end{matrix}\right\}$

La dernière condition est la condition cherchée et s'écrit:$xz-y^2-y = 0$

si $z = 0$ alors $y = 0$ et $x = b$ qui donne l'axe Ox, qui vérifie l'équation ci-dessus.

Deuxième méthode (pour celui qui n'a rien vu! Elle est intéressante à étudier compte tenu des outils utilisés: plans contenant une droite donnée, théorie des systèmes d'équation...)

Les droites Δ' et Δ_1 étant sécantes, elles définissent un plan P_1.

Or Δ_1 est définie cartésiennement par:$\left\{\begin{matrix} x-y = 0 \\ y-z+1 = 0 \end{matrix}\right\}$

Donc P_1 a une équation du type:$(x-y)+k(y-z+1) = 0$ ou c'est le plan $y-z+1 = 0$

De même avec Δ_2 avec laquelle Δ' définit un plan P_2.

Δ_2 est définie cartésiennement par $\left\{\begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ donc P_2 a une équation du type:

$y+rz = 0$ ou c'est le plan z=0.

Δ_3 est définie cartésiennement par $\left\{\begin{matrix} x+y = 0 \\ y+z+1 = 0 \end{matrix}\right\}$ donc le plan P_3 contenant cette droite et Δ' a une équation du type:$(x+y)+s(y+z+1) = 0$ ou c'est le plan $y+z+1 = 0$

L'intersection de ces trois plans doit contenir la droite Δ' donc le système définissant cette intersection doit être de rang inférieur ou égal à 2 et avoir des solutions.

Ce système est: $\left\{\begin{matrix} x+(k-1)y-kz = -k \\ y+rz = 0 \\ x+(s+1)y+sz = -s \end{matrix}\right\}$

Son déterminant est $\begin{vmatrix} 1 & k-1 & -k \\ 0 & 1 & r \\ 1 & s+1 & s \end{vmatrix} = (s - rs - r) + r(k-1) + k$

Le rang de ce système est 2 car le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ est non nul.

Il y a donc un espace affine de solution au plus de dimension 1 et il admet un tel espace affine de solutions si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées:

$(s - rs - r) + r(k-1) + k = 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & k-1 & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & s+1 & -s \end{vmatrix} = 0$

c'est à dire: $\left\{ \begin{matrix} rk - rs + s - 2r + k = 0 \\ -s + k = 0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} r = s \\ k = s \end{matrix} \right\}$

donc les droites Δ' qui conviennent sont définies cartésiennement par le système:

$\left\{ \begin{matrix} x + (s-1)y - sz = -s \\ y + sz = 0 \\ x + (s+1)y + sz = -s \end{matrix} \right\}$ qui se réduit à: $\left\{ \begin{matrix} x + sy = -s \\ y + sz = 0 \end{matrix} \right\}$

Un point M$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Delta' \Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{matrix} x + sy = -s \\ y + sz = 0 \end{matrix} \right\}$

Si $z = 0$ alors $y = 0$ et $x = -s$ et Δ' est l'axe Ox

Si $z \neq 0$ alors la condition est: $\exists s \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{matrix} x - \frac{y^2}{z} = \frac{y}{z} \\ s = \frac{-y}{z} \end{matrix} \right\}$

Les points des droites Δ' vérifient donc: $xz - y^2 - y = 0$ cette surface contient l'axe Ox. Donc cette équation décrit bien toutes les droites.

Nous reprenons les mêmes notations que dans la partie I pour étudier cette quadrique:

$M_{B_0}(q) = M_{B_0}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de f est: $(-1 - X)\left(X^2 - \frac{1}{4}\right)$ donc Sp$(f) = \left\{-1_{(1)}, \frac{1}{2}_{(1)}, -\frac{1}{2}_{(1)}\right\}$

0 n'est pas dans le spectre, la quadrique est donc centrée, les valeurs propres ne sont pas de même signe, donc le type est hyperbolique.

On calcule O' pour que $f(OO') + U = 0$ donc $\left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2}c = 0 \\ -b = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}a = 0 \end{matrix} \right\}$ qui donne bien le point

O' $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ On a C$(O') = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Dans un repère adapté, d'origine O' et d'axes donnés par les vecteurs propres, l'équation de cette quadrique est:$-X^2 + \frac{1}{2}Y^2 - \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{4} = 0$ qui est l'équation réduite d'un hyperboloïde à une nappe.

7/On a $\Delta_4 \left\{ \begin{array}{c} x - z - 2 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \end{array} \right\}$ dont un vecteur directeur est:$U_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $\Delta_5 \left\{ \begin{array}{c} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\}$ dont un vecteur directeur est:$U_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ces droites ne sont donc pas parallèles et le système donnant leur intersection est manifestement sans solutions. Ces deux droites ne peuvent donc être coplanaires.

Un vecteur directeur de la perpendiculaire commune à ces deux droites est:

$U_4 \wedge U_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ noté V

Un plan contenant Δ_4 a une équation du type:$a(x - z - 2) + b(y - 2z - 1) = 0$

Sa direction contient V ssi:$2a + 2b = 0$. On choisit $a = 1$ et $b = -1$

D'où un premier plan contenant la perpendiculaire commune, d'équation:

$x - y + z - 1 = 0$

Un plan contenant Δ_5 a une équation du type:$a(x - z) + b(y - z) = 0$

Sa direction contient V ssi:$2a + b = 0$. On choisit $a = 1$ et $b = -2$

D'où un deuxième plan contenant la perpendiculaire commune, d'équation:

$x - 2y + z = 0$

Un système d'équations cartésiennes est donc $\left\{ \begin{array}{c} x - y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right\}$

9/

a/L'axe de révolution passe donc par O et un vecteur directeur en est U_5

La surface S est donc constituée de cercles C$_{a,b}$ intersection de sphères centrées en O et de plans orthogonaux à l'axe, donc $C_{a,b}$: $\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 - a = 0 \\ x + y + z - b = 0 \end{array} \right\}$

Ces cercles doivent rencontrer Δ_4 d'où une condition sur a et b pour qu'il existe (x,y,z) tels que: $\left\{ \begin{array}{c} x - z = 2 \\ y - 2z = 1 \\ x + y + z = b \\ x^2 + y^2 + z^2 - a = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = b \\ y - 2z = 1 \\ -y - 2z = 2 - b \\ (4) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y + z = b \\ y - 2z = 1 \\ 4z = 3 - b \\ (4) \end{array} \right\}$

D'où $\left\{ \begin{array}{c} x = \frac{-13+7b}{4} \\ y = \frac{5-b}{2} \\ z = \frac{3-b}{4} \\ \left(\frac{-13+7b}{4}\right)^2 + \left(\frac{5-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-b}{4}\right)^2 - a = 0 \end{array} \right\}$

Cette dernière condition s'écrit: $54b^2 - 228b + 278 - 16a = 0$ qui se divise par 2.

Un point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{array}{c} M \in C_{a,b} \\ 54b^2 - 228b + 278 - 16a = 0 \end{array} \right\}$

Ce système s'écrit donc: $\left\{ \begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 - a = 0 \\ x + y + z - b = 0 \\ 27b^2 - 114b + 139 - 8a = 0 \end{array} \right\}$

Donc

$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \left\{ \begin{array}{c} a = x^2 + y^2 + z^2 \\ b = x + y + z \\ 27(x+y+z)^2 - 114(x+y+z) + 139 - 8(x^2+y^2+z^2) = 0 \end{array} \right.$

La troisième équation est la condition recherchée et donc l'équation de S est:

$27(x+y+z)^2 - 114(x+y+z) + 139 - 8(x^2+y^2+z^2) = 0$

b/ En suivant les notations déjà utilisées, on a:

$M_{B_0}(q) = M_{B_0}(f) = \begin{pmatrix} 19 & 27 & 27 \\ 27 & 19 & 27 \\ 27 & 27 & 19 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} -57 \\ -57 \\ -57 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de f

est: $\left| \begin{array}{ccc} 19 - X & 27 & 27 \\ 27 & 19 - X & 27 \\ 27 & 27 & 19 - X \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 27 - 8 - X & 27 & 27 \\ 27 & 27 - 8 - X & 27 \\ 27 & 27 & 27 - 8 - X \end{array} \right|$ qui se développe en:

$(-8 - X)^3 + 3 * 27 * (-8 - X)^2 = (-8 - X)^2(73 - X)$ d'où le spectre $\{-8_{(2)}, 73_{(1)}\}$

qui ne présente pas 0 comme valeur propre (quadrique centrée) et les valeurs propres ne sont pas de même signe donc type hyperbolique et la valeur propre double indique que c'est de révolution...pas trop étonnant!

Le centre vérifie le

système: $\left\{\begin{array}{l} 19a+27b+27c=57 \\ 27a+19b+27c=57 \\ 27a+27b+19c=57 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 73(a+b+c)=3*57 \\ 19a+27b+27c=57 \\ 27a+19b+27c=57 \\ 27a+27b+19c=57 \end{array}\right\}$

d'où $a=b=c=\frac{57}{73}$

On a $C(O')=27(3a)^2-114(3a)+139-8(3a^2)=219\left(\frac{57}{73}\right)^2-342\left(\frac{57}{73}\right)+139$

Donc $C(O')=219*57^2+149*73^2-342*57$ qui est clairement positif!

Donc l'équation dans un repère adapté centré en O' est:

$-8X^2-8Y^2+73Z^2+C(O')=0$ qui est l'équation réduite d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

NB: l'équation dans le repère 0',x,y,z "supprime" les termes du premier degré, de la forme:$27(x+y+z)^2-8(x^2+y^2+z^2)+C(O')=0$ et ensuite, il faut repartir sur la matrice...

Exercice

1/

a/On note $B_0=(e_1,e_2)$ et $M_{B_0}(f)=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On a manifestement $f(e_1)=e_2$

Donc, clairement, $E=Vect(e_1,f(e_1))$

b/le polynôme caractéristique de f est:X^2-3X+2 donc $Sp(f)=\{1_{(1)},2_{(1)}\}$

c/Un vecteur propre associé à 1 vérifie: $\left\{\begin{array}{l} -a-2b=0 \\ a+2b=0 \end{array}\right\}$ donc $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

Un vecteur propre associé à 2 vérifie: $\left\{\begin{array}{l} -2a-2b=0 \\ a+b=0 \end{array}\right\}$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

Ces deux vecteurs constituent une base B' et $M_{B'}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2/

a/ On a $M_{B_0}(g)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Manifestement $E=Vect(e_1,g(e_1)=e_2,g^2(e_1)=e_3)$ d'où le résultat.

b/ Le polynôme caractéristique de g est: $\begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & 1 & -1-X \end{vmatrix}=-X(X^2+X-1)+1$

qui s'écrit:$-X^3-X^2+X+1=(X+1)(-X^2+1)$ donc $Sp(g)=\{1_{(1)},-1_{(2)}\}$

c/ Un vecteur de Ker$(g+Id_E)$ vérifie: $\left\{\begin{array}{l} x+z=0 \\ x+y+z=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+z=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$

Ce sous-espace est de dimension 1<ordre(-1) donc g n'est pas diagonalisable.

Un vecteur X de Ker$\left[(g+Id_E)^2\right]$ est tel que $(g+Id_E)(X)\in$Ker$(g+Id_E)$

il vérifie donc: $\left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \{x+y+z=0\}$.Ce plan est stable par g, on en fabrique une base en choisissant U tel que Ker$(g+Id_E) \oplus < \{U\} >$=Ker$\left[(g+Id_E)^2\right]$

$U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient . Considérons $U_2 = (g+Id_E)(U_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Il est aussi dans le plan et forme une famille libre avec U_1.De plus, par construction $(g+Id_E)(U_2) = 0$ donc $g(U_2) = -U_2$ et $g(U_1) = -U_1 + U_2$

Un vecteur de Ker$(g - Id_E)$ vérifie: $\left\{ \begin{array}{c} -x+z=0 \\ x-y+z=0 \\ y-2z=0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x-y+z=0 \\ y-2z=0 \\ -y+2z=0 \end{array} \right\}$

On trouve comme prévu une droite engendrée par $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les trois vecteurs U_1, U_2, U_3 ont un déterminant dans la base B_0 qui est:

$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-2) = 4$ donc forment une base B'et on a:

$M_{B'}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dans la base $B" = (U_2, U_1, U_3)$

on a $M_{B"}(g) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$...

3/On a manifestement $h^k(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k x_i$

Donc Det$_{(x_1,x_2,....,x_n)}(y, h(y), \ldots, h^{n-1}(y))$ est un déterminant de Van der Monde associé à la famille $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Ce déterminant est non nul car ils sont deux à deux distincts. Donc la famille $(y, h(y), \ldots, h^{n-1}(y))$ est une base de E et donc l'endomorphisme est cyclique.