sportisse.lucien@orange.fr

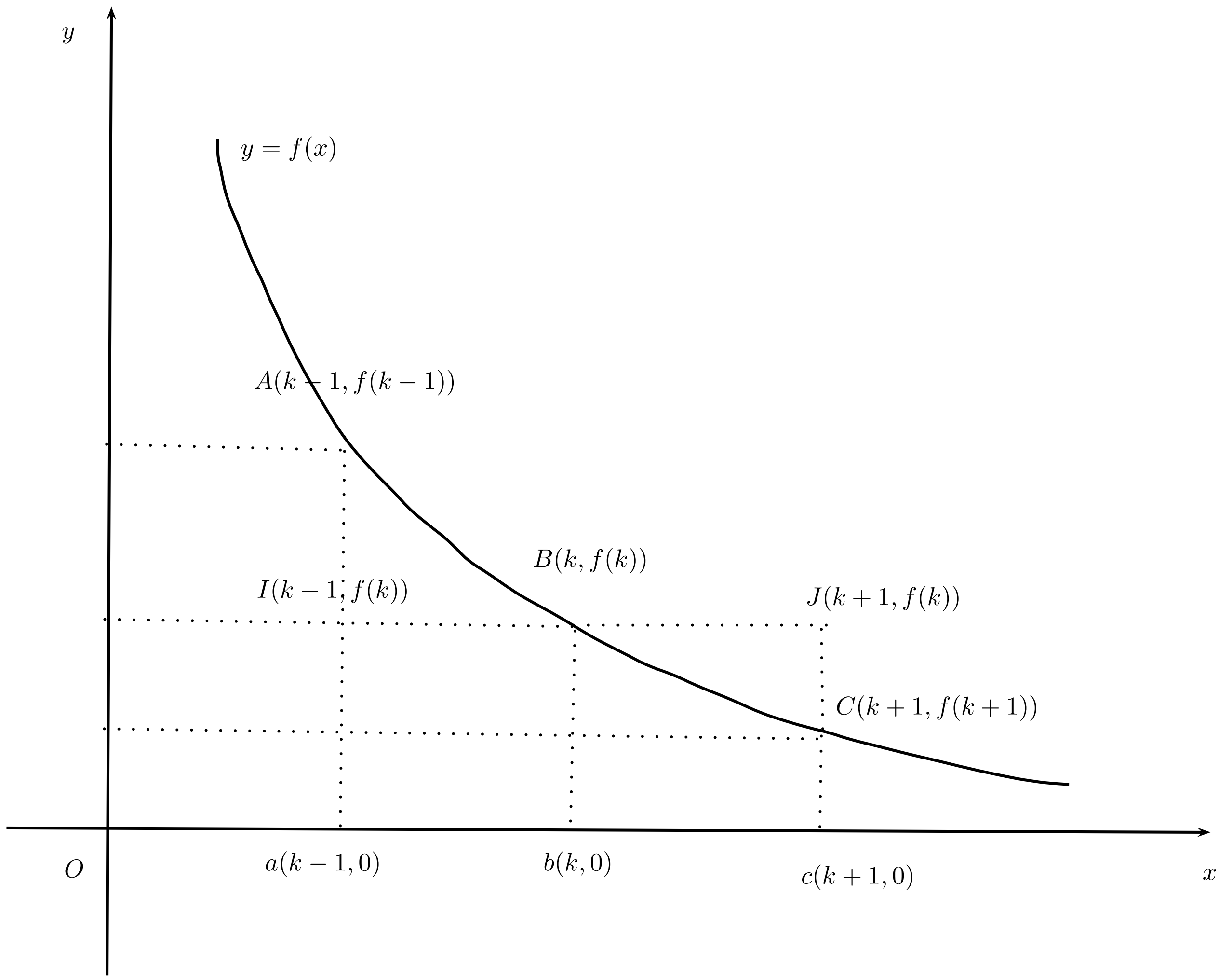
Corrigé

Préliminaire

Soit n_0 un entier naturel non nul et f une fonction à valeurs positives, continue par morceaux (hypothèse oubliée par l'énoncé), décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

a. Soit k entier naturel tel que $k \geqslant n_0 + 1$. f étant décroissante, $\begin{cases} \forall t \in [k, k+1] & f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k) \\ \forall t \in [k-1, k] & f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k-1) \end{cases}$. D'où :

$$\boxed{\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dt = f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\,dt \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt}$$



La double inégalité demandée traduit le fait que l'aire sous la courbe délimitée par $bcBC$ est inférieure ou égale à l'aire du rectangle $bcBJ$ et que l'aire sous la courbe délimitée par $abAB$ est supérieure ou égale à l'aire du rectangle $abBI$; les deux rectangles ont des côtés de longueur 1 et $f(k)$.

b. Soit $n \geqslant n_0 + 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0 + 1,\ \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,dt = \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)\,dt = \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt}$$

c. Rappelons des résultats du cours :

La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ est une série positive. Elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles définies par :

$$\forall n \geqslant n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$$

est majorée et dans ce cas la somme de la série est : $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) = \sup_{n \geqslant n_0} S_n$.

L'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ de la fonction positive f est convergente si et seulement si la fonction F définie par :

$$\forall x \geqslant n_0,\ F(x) = \int_{n_0}^{x} f(t)\,dt$$

est majorée et dans ce cas : $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt = \sup_{x \geqslant n_0} F(x)$.

On va montrer que la série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

– Supposons que l'intégrale généralisée converge. Comme dans ce cas : $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt = \sup_{x \geqslant n_0} F(x)$, la deuxième inégalité du b donne :

$$\forall n \geqslant n_0,\ S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k) = \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) + f(n_0) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt + f(n_0)$$

La série positive converge puisque la suite de ses sommes partielles est majorée.

– Supposons que la série converge. La première inégalité du b donne alors pour tout $n \geqslant n_0+1$: $\int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$.

D'où :

$$\forall n \geqslant n_0+1,\ F(n+1) = \int_{n_0}^{n+1} f(t)\,dt = \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\,dt + \int_{n_0+1}^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\,dt + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

Quel que soit $x \geqslant n_0$, soit $[x]$ la partie entière de x définie comme l'entier vérifiant $[x] \leqslant x < [x]+1$. Alors , comme F est croissante, car f est positive :

$$\forall x \geqslant n_0,\ F(x) \leqslant F([x]+1) \leqslant \int_{n_0}^{n_0+1} f(t)\,dt + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

Et, comme F est majorée, l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

On a bien montré la série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, et en cas de convergence, en passant à la limite pour $n \to +\infty$ dans l' inégalité du b :

$$\boxed{\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt}$$

Partie A

1)

a. La fonction f définie sur $[e,+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^2}$ est C^∞ sur $[e,+\infty[$, car quotient de fonctions C^∞ sur $[e,+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas.
Bien sûr, nul besoin de calculer f' pour le sens de variation : f est décroissante sur $[e,+\infty[$ puisque f est l'inverse d'une fonction croissante positive : mais puisque l'énoncé le demande :

$$\boxed{\forall x \geqslant e,\ f'(x) = -\frac{1}{t^2(\ln t)^3}(\ln t + 2)}$$

b. f décroit sur $[e,+\infty[$ de $\dfrac{1}{e}$ à 0. L'axe Ox est asymptote.

c.

d. Une primitive sur $[e,+\infty[$ de f, continue sur cet intervalle est F définie par :

$$\boxed{\forall x\geqslant e,\ F(x)=-\frac{1}{\ln t}}$$

Donc $\forall x\geqslant e,\ \displaystyle\int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt=\left[-\frac{1}{\ln t}\right]_e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

$\boxed{\text{L'intégrale généralisée } \displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt \text{ converge donc et } \int_e^{+\infty}\frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt=1.}$

e. $\boxed{\text{D'après le préliminaire, puisque } f \text{ est cpm et décroissante sur } [e,+\infty[\text{, la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)=\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n(\ln n)^2} \text{ converge.}}$

$\boxed{2\ )}$

a. La fonction g définie sur $[e,+\infty[$ par $g(t)=\dfrac{1}{t^2(\ln t)^2}$ est C^∞ sur $[e,+\infty[$, car quotient de fonctions C^∞ sur $[e,+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas.
Bien sûr, dans cette question aussi, nul besoin de calculer g' pour le sens de variation : g est décroissante sur $[e,+\infty[$ puisque g est l'inverse d'une fonction croissante positive : mais puisque l'énoncé le demande :

$$\boxed{\forall x\geqslant e,\ g'(x)=-2\frac{\ln t+1}{t^3(\ln t)^3}}$$

b. g décroit sur $[e,+\infty[$ de $\dfrac{1}{e^2}$ à 0. L'axe Ox est asymptote.

c.

d.

$$\forall t\geqslant e,\ 0\leqslant g(t)\leqslant\frac{1}{t^2}$$

Or l'intégrale de Riemman $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ converge car l'exposant de t au dénominateur est strictement supérieur à 1.

$\boxed{\text{Par comparaison par inégalité des intégrales généralisées des fonctions positives, l'intégrale généralisée } \displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{1}{t^2(\ln t)^2}\,dt \text{ converge aussi.}}$

e. $\boxed{\text{D'après le préliminaire, puisque } g \text{ est cpm et décroissante sur } [e,+\infty[\text{, la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} g(n)=\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{n^2(\ln n)^2} \text{ converge.}}$

$\boxed{3\ )}$

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$, définie par : $u_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{\ln p}{p}-\frac{1}{2}(\ln n)^2$.

a.

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ I_n=\int_n^{n+1}\frac{\ln t}{t}\,dt=\left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_n^{n+1}=\frac{1}{2}((\ln(n+1))^2-(\ln n)^2)}$$

b. La fonction h définie sur $[e,+\infty[$ par $h(t)=\dfrac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[e,+\infty[$, puisque :

$$\forall t\in[e,+\infty[,\ h'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}\leqslant 0$$

Etudions les variations de la suite (u_n) :

$$\forall n\geqslant 3,\ u_{n+1}-u_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{1}{2}((\ln(n+1))^2-(\ln n)^2)\underset{\text{cf }3-a}{=}\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{\ln t}{t}\,dt=\int_n^{n+1}\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}-\frac{\ln t}{t}\right)dt\underset{h\searrow}{\leqslant}0$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante.}}$

c.
$$\forall n \geqslant 3,\ u_n = \frac{\ln 2}{2} + \sum_{p=3}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \underset{\text{Préliminaire b}}{\geqslant} \frac{\ln 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt - \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

Or $\displaystyle\int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t}\,dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2}\right]_3^{n+1} = \frac{1}{2}((\ln(n+1))^2 - (\ln 3)^2)$. Donc :

$$\forall n \geqslant 3,\ u_n \geqslant \frac{\ln 2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}((\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2)}_{\geqslant 0}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ u_n \geqslant \frac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2}}$$

Remarque : l'énoncé indiquait à tort de démontrer cette propriété pour $n \geqslant 1$.

d. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et minorée : elle converge donc.}}$

e.
$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \Longrightarrow \forall n \geqslant 2,\ \frac{u_n}{\ln n} = \sum_{p=1}^{n} \underbrace{\frac{\ln p}{\ln n}}_{\leqslant 1} \frac{1}{p} - \frac{\ln n}{2}$$

D'où :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \frac{u_n}{\ln n} + \frac{\ln n}{2} \leqslant \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}$$

Comme la suite (u_n) converge, le premier membre de l'inégalité tend vers $+\infty$ pour n tendant vers l'infini. Ainsi :

$$\boxed{H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

$$\boxed{\text{La série harmonique de terme général } \frac{1}{n} \text{ diverge.}}$$

$\boxed{4\ )}$

On considère la suite $(H_n)_{n \geqslant 1}$ définie par : $H_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$.

a. On applique le préliminaire b à la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1}{t}$ et en prenant $n_0 = 1$:

$$\forall n \geqslant 2,\ 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t}\,dt \leqslant H_n = 1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\,dt$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ \ln(n+1) \leqslant \ln(n+1) + \underbrace{(1 - \ln 2)}_{\geqslant 0} \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n}$$

Il est effectivement facile de vérifier que la formule est vraie pour $n = 1$.

b. Posons : $\forall n \geqslant 1,\ \gamma_n = H_n - \ln n$. D'après le a, $\forall n \geqslant 1,\ 0 \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \gamma_n \leqslant 1$.
La suite (γ_n) est majorée par 1 et minorée par 0, d'après le a. Etudions les variations de cette suite.

$$\forall n \geqslant 1,\ \gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n)$$

Soit la fonction φ définie par : $\forall x > 0,\ \varphi(x) = \dfrac{1}{x+1} - (\ln(x+1) - \ln x)$.

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)^2} \geqslant 0$$

Donc φ est croissante sur $]0, +\infty[$. Or $\varphi(x) = \dfrac{1}{x+1} - -\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\forall x > 0,\ \varphi(x) \leqslant 0$.

Ainsi $\forall n\geqslant 1,\ \gamma_{n+1}-\gamma_n=\varphi(n)\leqslant 0$.

La suite (γ_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc. Comme la suite (γ_n) est majorée par 1 et minorée par 0, sa limite, notée l vérifie $0\leqslant l\leqslant 1$.

c. Formons un développement généralisé en l'infini de $\gamma_{n+1}-\gamma_n$:

$$\forall n\geqslant 1,\ \gamma_{n+1}-\gamma_n=\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\varepsilon(n)\right)-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon(n)\right)=-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{n^2}\varepsilon(n)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2n^2}$$

$$\boxed{\gamma_{n+1}-\gamma_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2n^2}}$$

Comme la série de référence de terme général $\dfrac{1}{n^2}$, par comparaison par équivalence des séries de signe constant, on en déduit que la série de terme général $\gamma_{n+1}-\gamma_n$ converge. Notons Γ sa somme. Alors :

$$\Gamma_{n-1}=\sum_{p=1}^{n-1}(\gamma_{p+1}-\gamma_p)=\gamma_n-\gamma_1=\gamma_n-1\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\Gamma\Longrightarrow\gamma_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\Gamma+1=l$$

On retrouve le résultat du b : la suite de terme général $\gamma_n=H_n-\ln n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\ln n$ est convergente.

d.

$$\sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{p}-\ln\frac{p}{p-1}\right)=\sum_{p=2}^{n}(H_p-H_{p-1}-(\ln p-\ln(p-1)))=\sum_{p=2}^{n}(\gamma_p-\gamma_{p-1})=\Gamma_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\Gamma=l-1$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n+1}\right)=l-1}$$

e. Bien sûr, $\forall n\geqslant 1,\ \gamma_n=\gamma_1+\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}(\gamma_k-\gamma_{k-1})=1+\sum_{k=2}^{k=n}(\gamma_k-\gamma_{k-1})$. Donc, d'après le d :

$$\forall n\geqslant 1,\ \gamma_n-l=1+\sum_{k=2}^{k=n}(\gamma_k-\gamma_{k-1})-\left(\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)+1\right)=\sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)-\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\ln\frac{k}{k-1}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\ \gamma_n-l=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}\right)}$$

f. Formons un développement généralisé en l'infini :

$$\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}=-\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{k}}=-\left(-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{3k^3}+\frac{1}{k^3}\varepsilon(k)\right)-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}\varepsilon(k)\right)$$

D'où $\ln\dfrac{k}{k-1}-\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{2k(k-1)}=-\dfrac{1}{6k^3}+\dfrac{1}{k^3}\varepsilon(k)=\dfrac{1}{k^2}\varepsilon(k)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ n_0\neq 0,\ \forall k\geqslant n_0,\ \left|\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{k^2}}$$

g. Comme la série de Riemann de terme général $\dfrac{1}{k^{2>1}}$ converge, la série de terme général $\ln\dfrac{k}{k-1}-\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{2k(k-1)}$ converge absolument et donc :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ n_0\neq 0,\ \forall n\geqslant n_0,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right)\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left|\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right|\leqslant\varepsilon\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}}$$

h. En fait, si on considère la fonction définie par $f(t)=\dfrac{1}{t^2}$, si on applique la deuxième inégalité de la fin du corrigé du préliiminaire à cette fonction, en remplaçant n_0 par n, comme $\displaystyle\int_n^{+\infty} f(t)\,dt=\frac{1}{n}$, on a :

$$\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ n_0\neq 0,\ \forall n\geqslant n_0,\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right)\right|\leqslant\varepsilon\frac{1}{n}}$$

Comme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2k(k-1)}=\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2n}$, on peut écrire :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ n_0\neq 0,\ \forall n\geqslant n_0,\ \left|H_n-l-\ln n-\frac{1}{2n}\right|=\left|\gamma_n-l-\frac{1}{2n}\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\ln\frac{k}{k-1}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2k(k-1)}\right)\right|\leqslant\varepsilon\frac{1}{n}$$

Et donc, non seulement comme l'énoncé le demande, on a :

$$\boxed{H_n-l-\ln n-\frac{1}{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}$$

Mais de plus, on obtient un développement asymptotique de H_n :

$$\boxed{H_n=\ln n+l+\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\varepsilon(n)}$$

Partie B

Soient h et β deux réels, avec $h>0$.

1)

Comme la puissance l'emporte sur le logarithme :

$$\boxed{\frac{1}{t^h(\ln t)^\beta}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0}$$

2)

La fonction $t\mapsto\dfrac{1}{t^h(\ln t)^\beta}$ est positive sur $]0,+\infty[$; n' oublions pas que $(\ln t)^\beta=e^{\beta\ln t}$!

D'après la question précédente, il existe $t_0>0$, tel que, pour tout $t\geqslant t_0$: $0<\dfrac{1}{t^h(\ln t)^\beta}<1$.

3)

Posons $\alpha=1+2h$. Comme $\dfrac{t^{1+h}}{t^\alpha(\ln t)^\beta}=\dfrac{1}{t^h(\ln t)^\beta}$, la question précédente montre que :

$$\boxed{\forall t\geqslant t_0,\ 0<\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}<\frac{1}{t^{1+h}}}$$

4)

Montrons la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,dt$, avec $t_0>0$ et $\alpha>1$.

Tout d'abord, la fonction $f:t\mapsto\dfrac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}$ est continue par morceaux, car continue sur $[t_0,+\infty[$. D' autre part, en posant $\alpha=1+2h$, $h>0$, l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty}\frac{1}{t^{1+h>1}}\,dt$ converge.

La question précédente montre, par comparaison par inégalité des intégrales généralisées des fonctions positives que, quel que soit $\alpha>1$, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{t_0>0}^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,dt$ converge.

5)

Soit $\alpha > 1$. La fonction f de la question précédente vérifie sur $[2, +\infty[$ les hypothèses du préliminaire ; en particulier, f est décroissante car c'est l'inverse d'une fonction positive croissante.

$$\boxed{\text{Donc, l'intégrale généralisée } \int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\, dt \text{ convergeant, il en est de même de la série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}.}$$

Partie C

a. Il est clair que, quel que soit $p > 0$, $\ln(n+p) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

En effet $\dfrac{\ln(n+p)}{\ln n} = \dfrac{\ln n + \ln\left(1+\frac{p}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{p}{n}\right)}{\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

Donc $\dfrac{[\ln(n+1)]^2}{\ln n \ln(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(\ln n)^2}{\ln n \ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi :

$$\boxed{v_n = 1 - \frac{[\ln(n+1)]^2}{\ln n \ln(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

Comme $\ln(n+p) = \ln n + \ln\left(1+\dfrac{p}{n}\right) = \ln n \left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{p}{n}\right)}{\ln n}\right)$, on peut écrire :

$$\boxed{\forall n\geqslant 2,\ v_n = 1 - \frac{\left(1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^2}{1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\ln n}}}$$

b. On fait un développement asymptotique au voisinage de l'infini :

$$v_n = 1 - \frac{\left[1+\dfrac{1}{\ln n}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{n^2}\varepsilon(n)\right)\right]^2}{1+\dfrac{1}{\ln n}\left(\dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}\varepsilon(n)\right)}$$

Rappelons qu'au voisinage de 0 : $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^2\varepsilon(u)$. D'où :

$$v_n = 1 - \left[1 + \frac{2}{\ln n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{1}{n^2(\ln n)^2} + \frac{1}{n^2(\ln n)^2}\varepsilon(n)\right]\left[1 - \frac{1}{\ln n}\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right) + \frac{4}{n^2(\ln n)^2} + \frac{1}{n^2(\ln n)^2}\varepsilon(n)\right]$$

Il existe donc k réel tels que : $\boxed{v_n = -\dfrac{1}{n^2\ln n} + \dfrac{k}{n^2(\ln n)^2} + \dfrac{1}{n^2(\ln n)^2}\varepsilon(n)}$.

Donc $\left|v_n + \dfrac{1}{n^2\ln n}\right| = \dfrac{1}{n^2(\ln n)^2}|k+\varepsilon(n)|$. Comme $\varepsilon(n)$ est bornée, puisque $\varepsilon(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe donc $a = -1$ et b réel tel que, lorsque n tend vers l'infini :

$$\boxed{\left|v_n - \frac{a}{n^2\ln n}\right| \leqslant \frac{b}{n^2(\ln n)^2}}$$

Or :

$$|v_n| = \left|\left((v_n - \frac{a}{n^2\ln n}\right) + \frac{a}{n^2\ln n}\right| \leqslant \left|v_n - \frac{b}{n^2(\ln n)^2}\right| + \frac{|a|}{n^2\ln n} \leqslant \frac{b}{n^2(\ln n)^2} + \frac{|a|}{n^2\ln n} = t_n$$

La série de terme général t_n converge comme somme de deux séries convergentes, d'après la deuxième partie.

$$\boxed{\text{Par comparaison par inégalité des séries positives, on en déduit que la série de terme général } v_n \text{ converge absolument.}}$$