Corrigé du sujet B de mathématiques, Banque PT 2011

Myriam Verdure

Partie I

1. Soit B le point de coordonnées $(0,0,2)$ dans $\mathcal{R}_O = \left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Soit M le point de coordonnées (x,y,z) dans $\mathcal{R}_O$. Notons (X,Y,Z) les coordonnées de M dans le repère translaté $\mathcal{R}_B = \left(B, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. Alors, $\left\{\begin{array}{l} X = x \\ Y = y \\ Z = z-2 \end{array}\right.$.

L'équation de Γ dans le repère $\mathcal{R}_B$ est : $X^2 + Y^2 - \dfrac{Z^2}{3} = 0$.

Donc, $\boxed{\Gamma \text{ est un cône de sommet } B(0,0,2)\text{, de révolution autour de l'axe } (B\vec{k}).}$

Ce cône est obtenu par la rotation autour de $\left(B\vec{k}\right)$ de la droite d'équation $Z = \sqrt{3}\,Y$, qui forme un angle θ avec l'axe $\left(B\vec{k}\right)$ tel que $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, soit $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

Donc, $\boxed{\text{le cône } \Gamma \text{ a pour un angle au sommet } \theta = \dfrac{\pi}{6}.}$

2. Soit A le point de coordonnées $(x_A, y_A, z_A) = \left(1, \sqrt{2}, 5\right)$.

Notons $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - \dfrac{1}{3}(z-2)^2$. Γ a pour équation cartésienne $F(x,y,z) = 0$.

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = 2x\,,\ \ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = 2y$ et $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -\dfrac{2}{3}(z-2)$.

Donc, en A, $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_A,y_A,z_A) = \begin{pmatrix} 2x_A \\ 2y_A \\ -2/3\,(z_A-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

Donc, le plan tangent à Γ en A a pour équation :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_A,y_A,z_A)\,(x-x_A) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_A,y_A,z_A)\,(y-y_A) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_A,y_A,z_A)\,(z-z_A) = 0,$$

soit : $2(x-1) + 2\sqrt{2}\,(y-\sqrt{2}) - 2(z-5) = 0$.

Après simplification, l'équation devient : $\boxed{x + \sqrt{2}\,y - z + 2 = 0.}$

3. Tout plan parallèle au plan Oxy a pour équation $z = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Notons C_α la courbe intersection de Γ avec le plan d'équation $z = \alpha$.

Alors, C_α a pour équations $\left\{\begin{array}{l} z = \alpha \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}(z-2)^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z = \alpha \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}(\alpha-2)^2 \end{array}\right.$.

Donc, dans le plan $z = \alpha$, C_α a pour équation : $\boxed{x^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}(\alpha-2)^2.}$

$\boxed{\text{Si } \alpha \neq 2,\ C_\alpha \text{ est le cercle du plan } z = \alpha\text{, de centre } \Omega_\alpha = (0,0,\alpha) \text{ de rayon } R_\alpha = \dfrac{|\alpha-2|}{\sqrt{3}}.}$

$\boxed{C_2 \text{ est réduit au point } B(0,0,2).}$

4.a. Notons $\mathcal{C}_0$ l'intersection de Γ avec le plan $x = 0$.

$\mathcal{C}_0$ a pour équations $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}(z-2)^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y^2 = \dfrac{1}{3}(z-2)^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ z - 2 = \pm\sqrt{3}\, y \end{array}\right.$

$\boxed{\mathcal{C}_0 \text{ est la réunion de deux droites du plan } x = 0, \text{ d'équations } z = 2 \pm \sqrt{3}\, y.}$

4.b. Notons $\mathcal{C}_k$ l'intersection de Γ avec le plan $x = k$, $k \neq 0$.

$\mathcal{C}_k$ a pour équations $\left\{\begin{array}{l} x = k \\ x^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}(z-2)^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = k \\ k^2 + y^2 = \dfrac{1}{3}(z-2)^2 \end{array}\right.$

Dans le plan $x = k$, $\mathcal{C}_k$ a pour équation : $\dfrac{(z-2)^2}{3\,k^2} - \dfrac{y^2}{k^2} = 1.$

$\boxed{\mathcal{C}_k \text{ est une hyperbole, de centre } I_k(k, 0, 2), \text{ d'axe focal } \big(I_k\, \overrightarrow{k}\big).}$

4.c. Tout plan parallèle à l'axe Oz est de la forme $P_{a,\theta} = M + \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{v_\theta}\big)$

où $M = O + a\,\overrightarrow{u_\theta}$ avec $\overrightarrow{u_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, et $v_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, \pi[$.

La surface Γ est invariante par rotation autour de l'axe Oz.

Notons r_θ la rotation d'angle θ autour de l'axe $\big(O\,\overrightarrow{k}\big)$.

Alors, $r_\theta\big(\overrightarrow{\jmath}\big) = \overrightarrow{v_\theta}$ et $r_\theta(O + a\,\overrightarrow{\imath}) = O + a\,\overrightarrow{u_\theta} = M$.

Donc, $P_{a,\theta}$ est l'image du plan $Q_a = M_0 + \mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{\jmath}\big)$ avec $M_0(a, 0, 0)$, soit le plan $Q_a : x = a$.

Par invariance par rotation autour de Oz, l'intersection de Γ avec le plan $P_{a,\theta}$ est de même nature que l'intersection de Γ avec le plan $x = a$. Si $a = 0$, on obtient une réunion de deux droites d'après 4.a. Si $a \neq 0$, on obtient une hyperbole d'après 4.b.

Remarquons que $a = 0$ si et seulement si $P_{a,\theta}$ contient Oz.

Notons P un plan parallèle à Oz et $\mathcal{C} = P \cap \Gamma$.

$\boxed{\text{Si } P \text{ contient } Oz, \mathcal{C} \text{ est la réunion de deux droites, sinon } \mathcal{C} \text{ est une hyperbole.}}$

5. Soit P un plan contenant le sommet $B(0, 0, 2)$ du cône Γ.

Γ est le cône de révolution autour de l'axe Bz, d'angle au sommet $\dfrac{\pi}{6}$.

En fonction de l'angle θ formé par P avec l'axe Bz, intuitivement l'intersection de P avec Γ sera

- l'ensemble vide, si $\theta > \dfrac{\pi}{6}$
- la réunion de deux droites, si $\theta < \dfrac{\pi}{6}$
- dans le cas critique $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, une seule droite.

Formalisons ce résultat. Pour cela, plaçons-nous dans le repère $\mathcal{R}_B = \big(B, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\big)$.

Soit P un plan passant par B, formant un angle $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ avec l'axe Bz.

Notons C_θ l'intersection de P avec Γ.

Par invariance de Γ par rotation autour de Bz, on peut considérer un plan P dirigé par $\overrightarrow{\imath}$.

Alors, $P = \text{Vect}\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{w_\theta}\right)$ avec $\overrightarrow{w_\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

Soit $\overrightarrow{n_\theta} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{w_\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$. Définissons le nouveau repère $\mathcal{R}' = \left(B, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{w_\theta}, \overrightarrow{n_\theta}\right)$.

Notons (X, Y, Z) les coordonnées d'un point dans $\mathcal{R}_B$ et (X', Y', Z') ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$.

Alors, $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} X = X' \\ Y = \sin\theta\, Y' - \cos\theta\, Z' \\ Z = \cos\theta\, Y' + \sin\theta\, Z' \end{cases}$

Γ a alors pour équation dans $\mathcal{R}'$: $X'^2 + \left(\sin\theta\, Y' - \cos\theta\, Z'\right)^2 = \dfrac{1}{3}\left(\cos\theta\, Y' + \sin\theta\, Z'\right)^2$.

On a construit le repère $\mathcal{R}'$ pour que P ait pour équation dans $\mathcal{R}'$: $Z' = 0$.

Donc, C_θ a pour équation dans $\mathcal{R}'$: $\begin{cases} Z' = 0 \\ X'^2 + \left(\sin\theta\, Y' - \cos\theta\, Z'\right)^2 = \dfrac{1}{3}\left(\cos\theta\, Y' + \sin\theta\, Z'\right)^2 \end{cases}$

soit C_θ : $\begin{cases} Z' = 0 \\ X'^2 + \sin^2\theta\, Y'^2 = \dfrac{\cos^2\theta}{3} Y'^2 \end{cases} \iff \begin{cases} Z' = 0 \\ X'^2 = \left(\dfrac{\cos^2\theta}{3} - \sin^2\theta\right) Y'^2 \end{cases}$

Notons $b = \dfrac{\cos^2\theta}{3} - \sin^2\theta$. Alors, $b = \dfrac{4}{3}\cos^2\theta - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos\theta > \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \theta < \dfrac{\pi}{6}$.

C_θ a pour équations dans $\mathcal{R}'$: $\begin{cases} Z' = 0 \\ X'^2 = b\, Y'^2 \end{cases}$.

Si $\theta < \dfrac{\pi}{6}$, alors $b > 0$ et C_θ est la réunion de 2 droites.

Si $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, alors $b = 0$ et C_θ est la droite dirigée par $\overrightarrow{w_\theta}$.

Si $\theta > \dfrac{\pi}{6}$, alors C_θ est l'ensemble vide.

Donc, l'intersection C de Γ avec un plan contenant son sommet $B(0, 0, 2)$ dépend de l'angle θ formé par ce plan avec l'axe vertical Bz.

$$\boxed{\text{Si } \theta < \frac{\pi}{6}, \text{ alors } C \text{ est la réunion de 2 droites. Si } \theta = \frac{\pi}{6}, C \text{ est une droite. Si } \theta > \frac{\pi}{6}, C = \emptyset.}$$

Partie II

1 . Dans le plan $x = 1$, la courbe $\mathcal{H}$ a pour équation $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ avec $a = b = 2$.

Donc, $\boxed{\mathcal{H} \text{ est une hyperbole.}}$

2 . Soit D une droite parallèle au plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, qui rencontre $\left(O\overrightarrow{k}\right)$.

Alors, $D = A + \text{Vect}\left(\overrightarrow{u}\right)$ avec $A(0, 0, \alpha)$ et $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0, \pi[$.

D est l'ensemble des points $M_t = A + t\,\overrightarrow{u} = \left(t\cos\theta, t\sin\theta, \alpha\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Pour que D rencontre $\mathcal{H}$, il faut qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $M_t \in \mathcal{H}$, soit $\begin{cases} t\cos\theta = 1 \\ t^2\sin^2\theta - \alpha^2 = 4 \end{cases}$

Fixons α. Ces deux équations donnent : $t^2 = t^2\big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\big) = 1 + 4 + \alpha^2 = 5 + \alpha^2$.
Donc, $t = \pm\sqrt{5+\alpha^2}$.
D'après la première équation, $\cos\theta = \dfrac{1}{t} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5+\alpha^2}}$.

Comme $\theta \in [0, \pi[$, $\sin\theta \geq 0$ et $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{5+\alpha^2}} = \sqrt{\dfrac{4+\alpha^2}{5+\alpha^2}}$.

Ainsi, les droites parallèles à $\big(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\big)$, qui rencontre $\big(O\vec{k}\big)$ et $\mathcal{H}$ sont les droites D_α et D'_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, paramétrées par

$$D_\alpha \ : \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{t}{\sqrt{5+\alpha^2}} \\ y = t\sqrt{\dfrac{4+\alpha^2}{5+\alpha^2}} \\ z = \alpha \end{array}\right. \quad \text{et} \quad D'_\alpha \ : \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{t}{\sqrt{5+\alpha^2}} \\ y = t\sqrt{\dfrac{4+\alpha^2}{5+\alpha^2}} \\ z = \alpha \end{array}\right. , \ t \in \mathbb{R}.$$

On a alors $\mathcal{S} = \displaystyle\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} D_\alpha \cup D'_\alpha$.

Donc, si $M(x,y,z) \in \mathcal{S}$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que $\left\{\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{t}{\sqrt{5+\alpha^2}} \\ y = t\sqrt{\dfrac{4+\alpha^2}{5+\alpha^2}} \\ z = \alpha \end{array}\right.$

Alors, $x^2\big(z^2+\beta^2\big) = \dfrac{t^2\big(\alpha^2+\beta^2\big)}{5+\alpha^2}$ et $y^2 = t^2\,\dfrac{4+\alpha^2}{5+\alpha^2}$.
En prenant $\beta = 2$, on a bien $x^2\big(z^2+\beta^2\big) = x^2\big(z^2+4\big) = y^2$.

Inversement, supposons que le point $M(x,y,z)$ vérifie l'équation $x^2\big(z^2+4\big) = y^2$.
Posons $\alpha = z$ et $t = y\sqrt{\dfrac{5+\alpha^2}{4+\alpha^2}}$. Alors, $y = t\sqrt{\dfrac{4+\alpha^2}{5+\alpha^2}}$ et $z = \alpha$.
L'équation $x^2\big(z^2+4\big) = y^2$ devient $x^2 = \dfrac{y^2}{z^2+4} = \dfrac{t^2}{\alpha^2+4}\,\dfrac{4+\alpha^2}{5+\alpha^2} = \dfrac{t^2}{5+\alpha^2}$, soit $x = \pm\dfrac{t}{\sqrt{5+\alpha^2}}$.
Donc, $M \in D_\alpha \cup D'_\alpha$ avec $\alpha = z \in \mathbb{R}$. $\boxed{\mathcal{S} \text{ est donc décrite par l'équation } y^2 = x^2\big(z^2+4\big).}$

3 . Notons C_b la section de $\mathcal{S}$ par le plan $x = b$.
C_b a pour équations $\left\{\begin{array}{l} x = b \\ y^2 = x^2\big(z^2+4\big) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = b \\ y^2 = b^2\big(z^2+4\big) \end{array}\right.$
Si $b \neq 0$, C_b a pour équation dans le plan $x = b$: $\dfrac{y^2}{4b^2} - \dfrac{z^2}{4} = 1$, de la forme $\dfrac{y^2}{\alpha^2} - \dfrac{z^2}{\beta^2} = 1$
avec $\alpha = 2b$ et $\beta = 2$. Donc, $\boxed{C_b \text{ est une hyperbole.}}$
Ses sommets sont les points $A(b, \alpha, 0)$ et $A'(b, \alpha, 0)$.
Ses foyers sont les points $F(b, c, 0)$ et $F'(b, -c, 0)$, avec $c = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = 2\sqrt{1+b^2}$.
Les sommets de C_b sont donc les points $A(b, 2b, 0)$ et $A'(b, -2b, 0)$.
Les foyers de C_b sont les points $F\big(b, 2\sqrt{1+b^2}, 0\big)$ et $F'\big(b, 2\sqrt{1+b^2}, 0\big)$.

Si $b = 0$, C_0 a pour équation dans le plan $x = 0$: $y = 0$. Donc, $\boxed{C_0 \text{ est la droite } \big(O\vec{k}\big).}$

Le lieu $\mathcal{E}_1$ des sommets des sections C_b de $\mathcal{S}$ par les plans d'équation $x = b$ est la réunion de deux droites privées chacune privée de leur point d'intersection O :

$$\boxed{\mathcal{E}_1 = D_1 \cup D_2 \text{ avec } D_1 = \Big\{(b, 2b, 0), b \in \mathbb{R}^*\Big\} \text{ et } D_2 = \Big\{(b, -2b, 0), b \in \mathbb{R}^*\Big\}.}$$

Le lieu $\mathcal{E}_2$ des foyers des sections C_b de $\mathcal{S}$ par les plans d'équation $x = b$ est la réunion de deux courbes Γ_1 et Γ_2, privée chacune d'un point ($b = 0$), avec :

$\Gamma_1 = \Big\{\big(b, 2\sqrt{1+b^2}, 0\big), b \in \mathbb{R}\Big\}$ et $\Gamma_2 = \Big\{\big(b, 2\sqrt{1+b^2}, 0\big), b \in \mathbb{R}\Big\}$.

Ces courbes du plan $z = 0$ ont pour équations respectives $y = 2\sqrt{1+x^2}$ et $y = -2\sqrt{1+x^2}$.

La réunion de ces 2 courbes a pour équation $y^2 = 4(1+x^2)$, soit $\dfrac{y^2}{4} - x^2 = 1$.

Il s'agit donc d'une hyperbole, privée de ses deux sommets.

Donc, $\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est l'hyperbole d'équations } \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{y^2}{4} - x^2 = 1 \end{cases}, \text{ privée de ses sommets.}}$

4 . $\mathcal{S}_0$ a pour équations $\begin{cases} y = c \\ y^2 = x^2\big(z^2+4\big) \end{cases} \iff \begin{cases} y = c \\ x^2\big(z^2+4\big) = c^2 \end{cases}$

$\mathcal{S}_0$ a pour équation dans le plan $y = c$: $\boxed{x^2\big(z^2+4\big) = c^2.}$

5 . $x'(t) = -\dfrac{c}{2}\sin t,\ \ x''(t) = -\dfrac{c}{2}\cos t,\ \ z'(t) = \dfrac{2}{\cos^2 t}$ et $z''(t) = \dfrac{4\sin t}{\cos^2 t}$.

Alors, $\Delta(t) = -2\,c\,\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + \dfrac{c}{\cos t} = \dfrac{c}{\cos^3 t}\big(-2\sin^2 t + \cos^2 t\big)$.

La courbure au point de paramètre t est $\boxed{\Delta(t) = \dfrac{c}{\cos^3 t}\big(1 - 3\sin^2 t\big).}$

Si $c \neq 0$, $\ \Delta(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - 3\sin^2 t = 0 \Leftrightarrow \sin^2 t = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \sin t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Les points d'inflexion de $\mathcal{S}_0$ sont les points de paramètre t tel que $\sin t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Dans ce cas, $\cos t = \pm\sqrt{1-\sin^2 t} = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{3}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ et $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Le point de $\mathcal{S}_0$ de paramètre t a pour coordonnées $\left(\dfrac{c}{2}\cos t,\ c,\ 2\tan t\right)$.

Les points d'inflexion de $\mathcal{S}_0$ sont donc les points :

$M_1\left(\dfrac{c}{\sqrt{6}}, c, \sqrt{2}\right)$, $M_2\left(\dfrac{c}{\sqrt{6}}, c, -\sqrt{2}\right)$, $M_3\left(-\dfrac{c}{\sqrt{6}}, c, \sqrt{2}\right)$ et $M_4\left(-\dfrac{c}{\sqrt{6}}, c, -\sqrt{2}\right)$.

Dans le cas où $c = 0$, l'équation de $\mathcal{S}_0$ dans le plan $y = 0$ est : $x^2\big(z^2+4\big) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Il s'agit donc de la droite (Oz). $\boxed{\text{Si } c = 0,\ \mathcal{S}_0 \text{ n'a pas de point d'inflexion.}}$

Ainsi, le lieu des points d'inflexion des sections $\mathcal{S}_0$ de $\mathcal{S}$ avec un plan d'équation $y = c$ est la réunion de 4 droites, privées chacune d'un point :

$$\boxed{\begin{array}{ll} D_1 = \left\{\left(\dfrac{c}{\sqrt{6}}, c, \sqrt{2}\right), c \in \mathbb{R}^*\right\}, & D_2 = \left\{\left(\dfrac{c}{\sqrt{6}}, c, -\sqrt{2}\right), c \in \mathbb{R}^*\right\}, \\ D_3 = \left\{\left(-\dfrac{c}{\sqrt{6}}, c, \sqrt{2}\right), c \in \mathbb{R}^*\right\}, & D_4 = \left\{\left(-\dfrac{c}{\sqrt{6}}, c, -\sqrt{2}\right), c \in \mathbb{R}^*\right\}. \end{array}}$$

Partie III

1 . En posant $p = 2$, le point F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

La parabole $\mathcal{P}$, qui a pour sommet O et pour foyer F, a pour équation $y^2 = 2px$, soit $\boxed{y^2 = 4x.}$

Remarquons que cette parabole passe effectivement par $A(1, -2)$.

2 . Soit $M(x_M, y_M)$ le point de $\mathcal{P}$ d'ordonnée $y_M = 2t$. Alors, $x_M = \dfrac{y_M^2}{4} = t^2$.

Ainsi, la parabole $\mathcal{P}$ est paramétrée par : $\left\{ \begin{array}{l} x = t^2 \\ y = 2t \end{array} \right.$

Notons $\overrightarrow{f(t)} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$. La tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{P}$ en M est dirigée par $\overrightarrow{f'(t)} = \begin{pmatrix} 2t \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

Ainsi, $\mathcal{T}$ a pour équation : $-x + t\,y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$ tel que $M \in \mathcal{T}$.

Or, $M \in \mathcal{T} \Leftrightarrow -t^2 + t \times 2\,t + c = 0 \Leftrightarrow c = -t^2$. D'où l'équation de $\mathcal{T}$: $\boxed{-x + t\,y - t^2 = 0.}$

Soit $\mathcal{N}$ la perpendiculaire à $\mathcal{T}$ passant par $A(1, -2)$.

$\mathcal{N}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$, donc pour équation : $t\,x + y + d = 0$ avec d tel que $A \in \mathcal{N}$.

Or, $A \in \mathcal{N} \Leftrightarrow t - 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2 - t$. Ainsi, $\mathcal{N}$ a pour équation : $\boxed{t\,x + y + 2 - t = 0.}$

Soit $N(x, y)$ le point d'intersection de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{N}$. Alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} -x + t\,y - t^2 = 0 \\ t\,x + y + 2 - t = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (t^2 + 1)y - t^3 + 2 - t = 0 \\ (t^2 + 1)x + 2t - t^2 + t^2 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{2t}{t^2 + 1} \\ y = \dfrac{t(t^2 + 1) - 2}{t^2 + 1} = t - \dfrac{2}{t^2 + 1} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Le point } N \text{ a pour coordonnées } \left(-\frac{2t}{t^2 + 1}, t - \frac{2}{t^2 + 1}\right).}$$

3 . La courbe $\mathcal{E}$ est paramétrée par $\left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{2t}{t^2 + 1} \\ y = t - \dfrac{2}{t^2 + 1} \end{array} \right.$

Traçons le tableau de variations des coordonnées.

Après calculs, on obtient $x'(t) = 2\,\dfrac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{(t^2 + 1)^2 + 4t}{(t^2 + 1)^2}$.

$x'(t) < 0 \Leftrightarrow t^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow t \in]-1, 1[$.

Le signe de y' est celui du polynôme $P(t) = (t^2 + 1)^2 - 4t = t^4 + 2t^2 + 4t + 1$.

Remarquons que -1 est racine de P. Ainsi, $P(t) = (t + 1)(at^3 + bt^2 + ct + d)$.

En identifiant, on obtient $a = 1$, $b = -1$, $c = 3$ et $d = 1$. Donc, $P(t) = (t + 1)(t^3 - t^2 + 3t + 1)$.

Etudions le signe de $Q(t) = t^3 - t^2 + 3t + 1$. $Q'(t) = 3t^2 - 2t + 3$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 36 < 0$, donc $Q'(t)$ ne change pas de signe et est toujours strictement positif.

Ainsi, la fonction Q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. C'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $Q(\alpha) = 0$. Alors, $Q(t) > 0, \forall\, t > \alpha$ et $Q(t) < 0, \forall\, t < \alpha$.

Remarquons de plus que $Q(0) = 1$ et $Q(-1) = -4$. Donc, $\alpha \in]-1, 0[$.

On obtient alors le tableau de signes suivant :

t	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$t+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$Q(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

D'où le tableau suivant :

t	$-\infty$		-1		α		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
$x(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$x(\alpha)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$y(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La tangente au point $M(1) = (-1, 0)$ est verticale car $x'(1) = 0$.

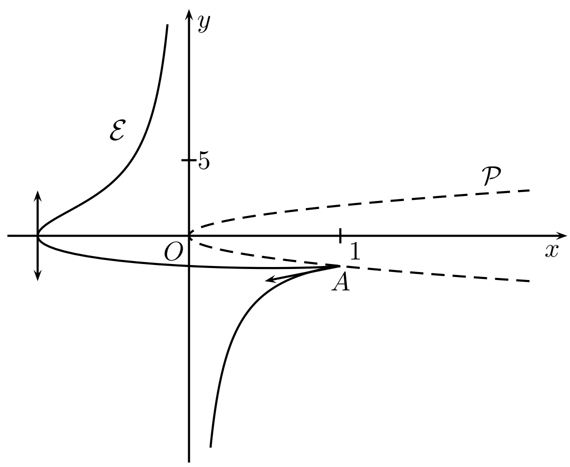
La tangente au point $M(\alpha)$ est horizontale car $y'(\alpha) = 0$.

Au point $A = M(-1) = (1, -2)$, $x'(-1) = y'(-1) = 0$, donc il s'agit d'un point stationnaire.

$x''(t) = \dfrac{4t\left(t^2+1\right) - 8t\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^3}$ et $y''(t) = \dfrac{4\left(t^2+1\right) - 16t^2}{\left(t^2+1\right)^3}$, soit $x''(-1) = -1$ et $y''(-1) = -1$.

La tangente à $\mathcal{E}$ en A est dirigée par le vecteur $\boxed{\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x''(-1) \\ y''(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.}$

En $\pm\infty$, $\lim\limits_{t \to \pm\infty} x(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to \pm\infty} y(t) = \pm\infty$. Donc, $\boxed{\mathcal{E} \text{ a pour asymptote la droite } x = 0.}$



4 . On suppose que les valeurs t_1, t_2 et t_3 sont distinctes. Notons N_i le point de $\mathcal{E}$ correspondant au paramètre t_i.

N_1, N_2, N_3 sont alignés si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{N_1N_2}, \overrightarrow{N_1N_3}\right) = 0$.

Or, $\overrightarrow{N_1N_2} = \begin{pmatrix} x(t_2) - x(t_1) \\ y(t_2) - y(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2t_2}{t_2^2+1} + \dfrac{2t_1}{t_1^2+1} \\ t_2 - t_1 - \dfrac{2}{t_2^2+1} + \dfrac{2}{t_1^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \end{pmatrix}$. Factorisons :

$x_{12} = \dfrac{2}{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}\left(t_1(t_2^2+1) - t_2(t_1^2+1)\right) = \dfrac{2(t_2-t_1)}{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}(t_1t_2 - 1)$

$y_{12} = \dfrac{1}{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}\left((t_2-t_1)(t_1^2+1)(t_2^2+1) - 2(t_1^2 - t_2^2)\right)$,

soit $y_{12} = \dfrac{t_2 - t_1}{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}\left(t_1^2t_2^2 + t_1^2 + t_2^2 + 1 + 2t_1 + 2t_2\right)$.

Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{N_1N_2}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u_{12}} = \begin{pmatrix} 2(t_1t_2 - 1) \\ t_1^2t_2^2 + t_1^2 + t_2^2 + 1 + 2t_1 + 2t_2 \end{pmatrix}$.

Donc, les trois points N_1, N_2, N_3 sont alignés si et seulement si $d = \det\left(\overrightarrow{u_{12}}, \overrightarrow{u_{13}}\right) = 0$ avec :

$d = 2(t_1t_2-1)\left(t_1^2t_3^2 + t_1^2 + t_3^2 + 1 + 2t_1 + 2t_3\right) - 2(t_1t_3 - 1)\left(t_1^2t_2^2 + t_1^2 + t_2^2 + 1 + 2t_1 + 2t_2\right)$.

Après développement et factorisation par $t_3 - t_2$, on obtient :

$d = 2(t_3 - t_2)\left(t_1^3t_2t_3 - t_1^3 + t_1t_2t_3 - t_1 - 2t_1^2 - t_1^2t_2 - t_1^2t_3 - t_2 - t_3 - 2\right)$

soit, $d = 2(t_3 - t_2)(t_1^2+1)\left(t_1t_2t_3 - (t_1+t_2+t_3) - 2\right)$.

Or, $t_3 - t_2 \neq 0$ et $t_1^2 + 1 > 0$, donc $d = 0 \Leftrightarrow t_1t_2t_3 - (t_1+t_2+t_3) - 2$.

Ainsi, $\boxed{N_1,\ N_2,\ N_3 \text{ sont alignés si et seulement si } t_1t_2t_3 - (t_1+t_2+t_3) = \alpha \text{ avec } \alpha = 2.}$

5 . Avec les notations précédentes, considérons la droite $D_{12} = (N_1N_2)$ et faisons tendre t_1 et t_2 vers la valeur t_0. Alors, la droite D_{12} "tend" vers la tangente à $\mathcal{E}$ au point N_0 de paramètre t_0.

Si N_3 est le point (distinct de N_1 et N_2) de rencontre de D_{12} avec $\mathcal{E}$, alors N_3 "tend" vers le point K par lequel la tangente en N_0 à $\mathcal{E}$ recoupe $\mathcal{E}$. Ainsi, $\theta = \lim t_3$ quand t_1 et t_2 tendent vers t_0.

En passant à la limite dans l'égalité $t_1t_2t_3 - (t_1+t_2+t_3) = 2$, on obtient :

$t_0^2\theta - (2t_0 + \theta) = 2 \Leftrightarrow \theta(t_0^2 - 1) = 2(t_0+1)$, soit $\boxed{\theta = \dfrac{2}{t_0 - 1}.}$

Remarquons que dans ce raisonnement on suppose $t_0 \neq \pm 1$. En effet, d'après le tracé de $\mathcal{E}$, les tangentes à $\mathcal{E}$ aux points $A = M(-1)$ et $M(1)$ ne recoupent pas la courbe.

Signalons qu'une autre méthode consistait à déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{E}$ en N_0 :

$\mathcal{T}_0\ :\ -\left(t_0^4 + 2t_0^2 + 4t_0 + 1\right)x + 2\left(t_0^2 - 1\right)y - 4\left(t_0^3 + 1\right) = 0$.

Puis, poser $x = x(\theta) = -\dfrac{2\theta}{1+\theta^2}$ et $y = y(\theta) = \theta - \dfrac{2}{1+\theta^2}$ dans l'équation de $\mathcal{T}$ pour obtenir :

$P(\theta) = a\,\theta^3 + b\,\theta^2 + c\,\theta + d = 0$ avec $\begin{cases} a = t_0 - 1 \\ b = -2\left(t_0^2 - t_0 + 1\right) \\ c = t_0^3 - t_0^2 + 4t_0 \\ d = -2t_0^2 \end{cases}$

Par construction, t_0 est une racine de P, puisque $N_0 \in \mathcal{T}$. On pouvait alors remarquer que t_0 est en fait racine double de P, pour avoir la troisième racine de P, θ, grâce par exemple à la relation $t_0^2\theta = -\dfrac{d}{a} = \dfrac{2t_0^2}{t_0 - 1}$, soit $\theta = \dfrac{2}{t_0 - 1}$.

6 . Soit N_1, N_2, N_3 trois points de $\mathcal{E}$, de paramètres t_1, t_2, t_3.

Notons K_1, K_2, K_3 leurs tangentiels et θ_1, θ_2, θ_3 les paramètres de ces tangentiels. $\theta_i = \dfrac{2}{t_i - 1}$.

Si N_1, N_2, N_3 sont alignés, alors $t_1t_2t_3 - (t_1 + t_2 + t_3) = 2$.

$\theta_1\theta_2\theta_3 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \dfrac{8}{(t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1)} - \dfrac{2}{t_1 - 1} - \dfrac{2}{t_2 - 1} - \dfrac{2}{t_2 - 1}$.

Après développement, on obtient :

$\theta_1\theta_2\theta_3 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 2\,\dfrac{1 + 2(t_1 + t_2 + t_3) - (t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3)}{t_1t_2t_3 + t_1 + t_2 + t_3 - (t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3) - 1} = 2\,\dfrac{N}{D}$.

Or, $t_1t_2t_3 = 2 + t_1 + t_2 + t_3$.

Donc, $D = t_1t_2t_3 + t_1 + t_2 + t_3 - (t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3) - 1 = 1 + 2(t_1 + t_2 + t_3) - (t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3) = N$ et $\theta_1\theta_2\theta_3 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 2$.

D'après la question 4, les points K_1, K_2, K_3 sont alignés.

Ainsi, $\boxed{\text{si 3 points de } \mathcal{E} \text{ sont alignés, alors leurs tangentiels sont alignés.}}$

7 . La tangente à $\mathcal{E}$ au point de paramètre 1 ne recoupe pas la courbe.

Donc, $\boxed{\text{le point de paramètre 1 n'a pas de tangentiel.}}$

8 . D'après la définition du tangentiel K de N_0 donnée dans la question 5, K et N_0 sont distincts.

$\boxed{\text{Un point ne peut pas être confondu avec son tangentiel.}}$