Banque PT
PHYSIQUE & TECHNOLOGIE

10PT29

Epreuve de Mathématiques B

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

<u>A rendre avec la copie deux feuilles de papier millimétré</u>

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.
Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

PARTIE A

Dans l'espace euclidien, rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les quadriques $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ et $\mathcal{Q}_3$ d'équations respectives :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{Q}_1 & 2x^2+2y^2+z^2-2yz+2xz-1=0\ ; \\ \mathcal{Q}_2 & 5x^2+y^2+z^2-2xy-6yz+2xz-1=0\ ; \\ \mathcal{Q}_3 & 7x^2+4y^2+4z^2+4xy-2yz-4xz-4x+5y+4z+4=0. \end{array}$$

1. Déterminer la nature des quadriques $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$.

2. Soit le point $I\left(\dfrac{11}{27}, \dfrac{-26}{27}, \dfrac{-29}{54}\right)$. Donner l'équation de $\mathcal{Q}_3$ dans le repère $(I\ ;\ \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ où :

$$\vec{e_1}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\ ;\ \vec{e_2}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{i}-2\vec{j})\ ;\ \vec{e_3}=\frac{1}{\sqrt{30}}(2\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}).$$

   Préciser la nature de la quadrique $\mathcal{Q}_3$.

On se place jusqu'à la fin de cette partie dans le repère $(I\ ;\ \vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$.
On considère l'ellipsoïde $\mathcal{Q}$ d'équation :

$$9x^2 + 3y^2 + 3z^2 - \frac{8}{27} = 0.$$

3. Déterminer le volume de l'ellipsoïde $\mathcal{Q}$.
4. Donner une équation cartésienne du plan tangent à l'ellipsoïde au point $M(x_0,\ y_0,\ z_0) \in \mathcal{Q}$.
5. (a) Donner des équations de la normale Δ_M à l'ellipsoïde au point $M(x_0,\ y_0,\ z_0) \in \mathcal{Q}$.
   (b) On se place dans le cas où la normale à l'ellipsoïde rencontre les plans de coordonnées. On note respectivement P, Q et R les points d'intersection entre la normale Δ_M et les plans d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.
   Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{MR}$ sont colinéaires.
6. (a) Déterminer la nature de la courbe $\mathcal{E}_0$, intersection de l'ellipsoïde $\mathcal{Q}$ et du plan d'équation $z = 0$.
   On désigne par $\mathcal{C}_T$ un cône de sommet $T(p,\ q,\ r)$ passant par $\mathcal{E}_0$; p, q et r désignent trois réels avec $r \neq 0$.
   (b) Rappeler une condition nécessaire et suffisante, exprimée vectoriellement, pour qu'un point M appartienne au cône $\mathcal{C}_T$.
   (c) En déduire que le point $M(x,\ y,\ z)$ appartient au cône $\mathcal{C}_T$ si, et seulement si :

   $$\frac{243}{8}(xr - zp)^2 + \frac{81}{8}(yr - zq)^2 = (r - z)^2.$$

   (d) Déterminer les équations de l'intersection entre le cône $\mathcal{C}_T$ et le plan de coordonnées d'équation $x = 0$.
   (e) En déduire les équations et la nature du lieu $\mathcal{H}$ des sommets des cônes contenant la courbe $\mathcal{E}_0$ et coupant le plan d'équation $x = 0$ suivant un cercle.

PARTIE B

Dans le plan euclidien, rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath})$, on considère les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ d'équations respectives :

$$\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right. .$$

1. Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle $\mathcal{C}$.
2. Former une équation de la tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point O.
3. On considère le point A de coordonnées $(3,\ -2)$. Démontrer que la droite d_m du plan de coefficient directeur $m \in \mathbb{R}$, passant par A a pour équation :

   $$y = mx - 3m - 2.$$

4. Exprimer, en fonction du réel m, la distance δ_m du point Ω à la droite d_m.

5. En déduire qu'il existe deux valeurs de m pour lesquelles d_m est tangente au cercle $\mathcal{C}$. Donner des équations de ces deux droites et déterminer les coordonnées des points de contact de ces droites avec le cercle $\mathcal{C}$.
6. Déterminer la nature, l'excentricité, les foyers F_1 et F_2 et les directrices de la courbe plane $\mathcal{E}$.

On paramètre alors $\mathcal{E}$ en posant :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\cos t \\ y = \sin t \end{cases} .$$

7. Calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{E}$.
8. Former une équation de la tangente à $\mathcal{E}$ au point $B\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
9. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble des points du plan où passent deux tangentes orthogonales à la courbe $\mathcal{E}$.
   (a) Donner une équation de la tangente à $\mathcal{E}$ au point de coordonnées (x_0, y_0).
   (b) On considère la droite D d'équation $ax + by = c$ avec a et b réels non tous deux nuls. Montrer que la droite D est tangente à $\mathcal{E}$ si, et seulement si :
   $$a^2 + 4b^2 = 4c^2.$$
   (c) Soit $M(\alpha, \beta)$ un point du plan avec $\beta^2 \neq 1$. Montrer que la droite D passe par M si, et seulement si, $c = a\alpha + b\beta$.
   (d) On notera $m = -b/a$. Montrer que D passe par M en étant tangente à $\mathcal{E}$ si, et seulement si :
   $$\left(1-\beta^2\right)m^2 + 2\alpha\beta m + \frac{1}{4} - \alpha^2 = 0.$$
   (e) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que passent deux droites tangentes à $\mathcal{E}$ par le point $M(\alpha, \beta)$. Une interprétation géométrique simple de la condition analytique est demandée.
   (f) Déterminer alors l'ensemble des points du plan où passent deux tangentes orthogonales à la courbe $\mathcal{E}$. Construire cet ensemble.

PARTIE C

Le plan euclidien étant rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe Γ dont les équations paramétriques sont :

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad ; \qquad y = \frac{t-t^3}{1+t^2}.$$

1. Etude et tracé de Γ.
   (a) Donner une interprétation géométrique du paramètre réel t.
   (b) Montrer que Γ possède un axe de symétrie que l'on précisera.
   (c) Dresser le tableau des variations des fonctions x et y.
   (d) Donner l'équation de l'asymptote de Γ.
   (e) Calculer les coordonnées des points où la tangente à Γ est verticale ou horizontale.
   (f) Montrer que Γ possède un point double que l'on précisera.
   (g) Quel angle forment les tangentes à Γ au point double ?
   (h) Tracer Γ.
2. Former une équation cartésienne de Γ.
3. Donner un paramétrage en polaires de Γ.
4. Calculer l'aire de la boucle formée par Γ.
5. On considère la droite Δ d'équation $ux + vy + w = 0$.
   (a) Montrer que le point $M \in \Gamma$, de paramètre t, appartient à Δ si, et seulement si :
   $$vt^3 + (u - w)t^2 - vt - (u + w) = 0.$$
   (b) En notant t_1, t_2 et t_3 les racines de cette équation et en utilisant :
   $$\forall t \in \mathbb{R} \quad vt^3 + (u - w)t^2 - vt - (u + w) = v(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) \ ;$$
   donner la valeur de $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1$.
   (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que trois points de Γ, de paramètres t_1, t_2 et t_3, soient alignés.
6. Soit le point $A(1,\, 0)$ de Γ. Une droite issue de A recoupe Γ en deux points M_1 et M_2 de paramètres respectifs t_1 et t_2.
   (a) Quel est le paramètre du point A ?
   (b) Quelle relation vérifient t_1 et t_2 ?
   (c) Que peut-on dire des droites (OM_1) et (OM_2) ?
   (d) Montrer que le cercle de diamètre $[M_1 M_2]$ est tangent à l'axe Ox.
7. Soit S un point de paramètre t_0.
   (a) Quelle est l'équation qui donne les paramètres des points de contact M' et M'' des tangentes à Γ issues de S ? A quelle condition sur t_0 ces points existent-ils ?
   (b) La droite $(M'M'')$ recoupe Γ au point P. Quelle est, en fonction de t_0, le paramètre du point P ?
   (c) Que peut-on dire des droites (OP) et $(M'M'')$?

FIN DE L'EPREUVE.