Philippe GUILHAUMON
Mathématiques PT
Lycée JEAN DUPUY
philippe.guilhaumon@prepa.org

Contrôle a posteriori

Épreuve C - Banque PT - Mai 2008

▷ Première partie

1. Pour cette question, on pouvait, par exemple, effectuer une étude de la fonction $\psi : x \in]-1,+\infty[\mapsto \ln(1+x) - x$ sur son intervalle de définition, ou bien préférer l'intervention du théorème des accroissements finis. Le contexte « calcul intégral »de l'exercice fait préférer écrire :
$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) = \int_0^x \frac{du}{1+u}$$
Les inégalités $\dfrac{1}{1+u} \leq 1, \forall u \geq 0$ et $\dfrac{1}{1+u} \geq 1, \forall u \in]-1,0]$ permettent alors d'obtenir le résultat désiré quitte à distinguer les cas $x \in]-1,0]$ et $x \geq 0$, par croissance de l'intégrale.
2. Si $t \in]0,\sqrt{n}[$ où $n \in \mathbb{N}^\star$, définissons $x = \varepsilon \dfrac{t^2}{n}$ où $\varepsilon = \pm 1$. Puisque $x \in]-1,1[\subset]-1,+\infty[$, la première question permet d'obtenir les deux inégalités souhaitées.
3. en multipliant chacune des inégalités de la question 2) par l'entier strictement positif n et composant par la fonction croissante qu'est l'exponentielle réelle, on obtient les inégalités :
$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$
qui donnent par intégration sur $[0,\sqrt{n}]$,
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$
Remarque : *la dernière inégalité de la question pose implicitement la question de la convergence de l'intégrale impropre* $F = \displaystyle\int_0^\infty \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$ *: peut-être aurait-on pu détailler davantage ce point.*
   - Si on s'intéresse à la convergence de F, la continuité de l'intégrande sur $[0,+\infty[$ permet de restreindre le problème de convergence à l'étude de la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$. Celle-ci est rapidement réglée par les deux affirmations :
$$\left|\begin{array}{c} 0 \leq \left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-n} \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{t^{-2n}}{n^{-n}}\right) \\ \text{et} \\ \displaystyle\int_1^\infty t^{-2n} dt \text{ converge car } n \in \mathbb{N}^\star \end{array}\right.$$
   - L'inégalité $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \leq \int_0^{+\infty} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$ découle ensuite de l'emboîtement $[0,\sqrt{n}] \subset [0,+\infty[$ et de la positivité de l'intégrande sur $[0,+\infty[$.

4. ***Remarque :*** *Il fallait lire* $\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ *au lieu de* $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.

a) Si on considère l'application $\varphi : \begin{cases}]0,\frac{\pi}{2}[& \to &]0,+\infty[\\ u & \mapsto & \sqrt{n}\,\text{cotan}(u) \end{cases}$ où $n\in\mathbb{N}^\star$. Il s'agit de vérifier que cette application définit bien un changement de variables : c'est évidemment une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui est bijective de $]0,\frac{\pi}{2}[$ sur $]0,+\infty[$ (Cours de PTSI).
En appliquant la formule de changement de variable adaptée à l'intégration sur un intervalle quelconque (Cours de PT), puisque nous avons démontré l'intégrabilité de $t\mapsto\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$ sur $]0,+\infty[$ (voir question 3)), on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+cotan\,(u)^2\right)^{-n}\left|\frac{-\sqrt{n}}{\sin(u)^2}\right|du=\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2n-2}\,du$$

Nota bene : *Il est aussi possible de se ramener à la définition de l'intégrale :*

$$\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt=\lim_{M\to+\infty}\int_0^{M}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}dt$$

et de procéder au changement de variable de manière classique, avant de faire tendre M *vers* $+\infty$.

b) Le changement de variable donné par $t=\sqrt{n}\cos(u)$, $u\in[0,\frac{\pi}{2}]$ permet d'obtenir la relation :

$$\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^{n}dt=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos(u)^2\right)^{n}\left(-\sqrt{n}\sin(u)\right)du=\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2n+1}\,du$$

c) La question 3) formulée grâce aux réponses des questions 4a) et 4b) permet d'obtenir l'inégalité :

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2n+1}\,du\leqslant\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}dt\leqslant\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2n-2}\,du$$

5. L'équivalence $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^N du\underset{N\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2N}}$ permet de prouver les équivalences :

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2n+1}\,du\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{n\pi}{2(2n+1)}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(u)^{2n-2}\,du\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{n\pi}{2(2n-2)}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

l'application du théorème des suites encadrantes à l'inégalité donnée par 4c) permet de déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Remarque : *il paraît nécessaire que les candidats établissent aussi la convergence de l'intégrale impropre donnée par* I*, en faisant intervenir une propriété du type :*
« Si $F:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *est une fonction croissante alors* $\lim\limits_{X\to+\infty}F(X)=L\in\mathbb{R}$, $X\in\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty}F(\sqrt{n})=L\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ *».*
on appliquerait cette proposition à la fonction $F:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *donnée par* $F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$*, dont la croissance découle du signe de l'intégrande.*

On trouve alors $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Le calcul de la valeur de J (mais aussi sa convergence) repose ici sur la simple remarque : $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-t^2} dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ comme le montre le changement de variable $u = -t$ et le permet la parité de l'intégrande : on obtient enfin $J = 2I = \sqrt{\pi}$.

La valeur (et la convergence) de K peut être traitée en posant $u = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ qui mène rapidement à $K = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

▷ Deuxième partie

1. Nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.
2. Question de développabilité en série entière au voisinage de 0 de F

   a) La définition de l'exponentielle complexe $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ valable pour tout $z \in \mathbb{C}$ permet d'obtenir :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\, n!} x^{2n}$$

   La fonction $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ est donc développable en série entière et ce développement a un rayon de convergence infini.

   b) Parmi les opérations analytiques sur les développements en série entière, l'intégration terme à terme de ce développement sur l'intervalle $[0, x]$ strictement contenu dans l'intervalle ouvert de convergence (ici $\mathbb{R}$), permet d'écrire :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n\, (2n+1)n!} x^{2n+1}$$

   Remarque : *la notion de développabilité en série entière d'une fonction de la variable réelle, n'apparaît pas explicitement au programme de PT. Peut-être le « rappel »de cette définition aurait-il pu être fait.*
   A l'inverse, demander d'admettre que F est égale à la somme d'une série entière au voisinage de 0 est conforme au programme, mais le théorème de Cauchy et la recherche d'une solution de l'équation différentielle sous forme de somme de série entière (à rayon non nul) aurait permis d'obtenir cela.
3. Vu que la fonction F est le produit de la primitive de $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ nulle en 0 par $x \mapsto e^{\frac{x^2}{2}}$, c'est une fonction dérivable qui vérifie

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = xe^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + e^{\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} = xF(x) + 1$$

4. On peut suivre le schéma de démonstration :

   i.) Il existe un $\rho > 0$ tel que $\forall x \in]-\rho, \rho[$, $F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ d'après ce que nous avons admis en fin de page 2 de l'énoncé.

2i.) Le théorème de dérivation terme à terme d'une fonction s'écrivant comme somme de série entière permet d'avoir :$\forall x \in]-\rho, \rho[$, $F'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, a_k x^{k-1} = \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)\, a_{p+1} x^p$.

3i.) Le calcul de $xF(x)+1$ donne pour $x \in]-\rho, \rho[$,

$$1 + xF(x) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k-1} x^k \underset{\mathbf{k=p+1}}{=} \sum_{p=0}^{+\infty} b_p x^p \text{ avec } b_0 = 1 \text{ et } b_k = a_{k-1} \text{ pour } k \in \mathbb{N}^\star$$

4i.) On doit faire intervenir un théorème d'unicité du développement en série entière pour déduire de l'identité sur $]-\rho, \rho[$: $F'(x) = xF(x)+1$ que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = (n+1)a_{n+1}$$

Remarque : *un tel résultat d'unicité paraît pouvoir être considéré comme limite programme de PT. Imaginer éviter le problème par le biais d'un résultat d'unicité d'écriture du développement limité d'une fonction au point* 0*, mène à la même interrogation. L'existence est explicite, pas l'unicité.*

5i.) Le calcul de a_0 découle de $a_0 = F(0) = 0$ et les autres égalités des deux points précédents $a_1 = b_0 = 1$ et pour $n \geq 2$ entier $a_{n-1} = (n+1)a_{n+1}$.

5. Une démonstration par récurrence et les relations obtenues à la question précédente permettent de déduire que pour $p \geq 0$ entier :

$$\left| \begin{array}{l} a_{2p} = 0 \text{ car } a_0 = 0 \\ a_{2p+1} = \dfrac{a_1}{2^p(p+1)!} \text{ car pour tout entier } k \geq 1,\ a_{2k+1} = \dfrac{a_{2k-1}}{2(k+1)} \end{array} \right.$$

6. a) D'après les conclusions de la première partie et par définition :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

b) Si une fonction G de la variable réelle vérifie $\lim_{x \to +\infty} G(x) = \ell \neq 0$, on a $G(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ell$.
L'application de cette remarque à $G : x \mapsto \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ permet de conclure que $F(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\frac{x^2}{2}}$

▷ Troisième partie

1. Cette question porte sur les théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe intégral.

(a) Définissons le segment $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ et la fonction $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} I \times [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (\theta, x) & \mapsto & e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} \end{array} \right.$.
Comme la fonction de deux variables ψ est continue sur $I \times [0, +\infty[$ et que I est un segment, un corollaire immédiat du théorème de continuité sous le signe intégral permet de conclure à la continuité de g sur $[0, +\infty[$.

(b) Pour montrer que la fonction g est de dérivable sur l'ouvert $]0, +\infty[$, on pense, naturellement, au théorème de dérivation sous le signe intégral. La version analogue à la réponse donnée en 1a) n'est pas mentionnée par le programme.
La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times]0, +\infty[$ comme la montre les chaînes de composition :

$$\left| \begin{array}{l} (\theta, x) \mapsto x^2, \text{ fonction } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}^2 \\ (\theta, x) \mapsto \theta^2 \mapsto \cos(\theta)^2, \text{ fonction } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ à valeurs dans } \mathbb{R}_+^\star \text{ sur un ouvert contenant } I \times]0, +\infty[\\ (u, v) \mapsto \dfrac{u}{v}, \text{ fonction } \mathcal{C}^1 \text{ sur } u \in \mathbb{R}, v > 0 \end{array} \right.$$

Cette régularité de ψ permet d'affirmer que :

☞ pour tout $x \in]0, +\infty[$, les applications $\theta \in I \mapsto e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}}$ et
$\theta \in I \mapsto -2x(1+\tan(\theta)^2)e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}}$ sont continues.
☞ pour tout $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, l'application $x \in]0, +\infty[\mapsto -2x(1+\tan(\theta)^2)e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}}$ est continue.

Nota bene : *les deux assertions ci-dessus peuvent être prouvées directement, si on préfère !*

La condition relative à l'hypothèse de domination découle du fait que :

$$\forall (\theta, x) \in [0, \frac{\pi}{4}] \times]0, +\infty[, \left| -2x(1+\tan(\theta)^2)e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} \right| \leq 4xe^{-x^2} \leq 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

La constante $2\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}}$ se calcule en faisant une étude rapide de $x \mapsto 4xe^{-x^2}$: elle permet de définir une fonction (constante !) intégrable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ qui réalise l'hypothèse de domination de ψ sur $[0, \frac{\pi}{4}] \times]0, +\infty[$.

Le travail fait au 1b) permet d'écrire $g'(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} -2x(1+\tan(\theta)^2)e^{-\frac{x^2}{\cos^2(\theta)}} d\theta$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
Conformément à l'indication, en posant $u = \tan(\theta)$, on obtient :

$$\forall x > 0,\ g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+u^2)} du = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xu)^2} du = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

La dernière expression a été obtenue en posant $t = xu$.

Nous pouvons conclure en évoquant, à nouveau, le théorème fondamental du calcul intégral pour montrer que $(f^2)'(x) = 2e^{-x^2} f(x)$ et conclure à la constance de la fonction h dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ vu que $\forall x > 0, h'(x) = 0$. Pour démontrer la constance de h sur $[0, +\infty[$, on fait enfin référence à la continuité de h sur $[0, +\infty[$ (question 1a)). Finalement :

$$h(0) = \lim_{x \to 0^+} h(x) = h(t),\ \forall t > 0$$

Dans cette question, on étudie le comportement asymptotique de g en $+\infty$.

a) pour tout $x \geq 0$, $g(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x^2}{\cos(\theta)^2}} d\theta$ vérifie évidemment $g(x) \geq 0$. La deuxième inégalité, peut être trouvée comme suit :

$$\forall x \geq 0,\ g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(1+\tan(\theta)^2)x^2} d\theta = e^{-x^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{e^{-\tan(\theta)^2 . x^2}}_{\leq 1} d\theta \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$$

b) Il suffit de passer à la limite dans l'inégalité précédente pour démontrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Pour tout $x \geq 0$, on sait que $h(x) = h(0)$ donc

$$\forall x \geq 0,\ f(x)^2 + g(x) = \underbrace{f(0)^2}_{0} + \underbrace{g(0)}_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

La question 3b) permet d'obtenir $\lim_{x \to +\infty} f(x)^2 = \frac{\pi}{4}$. Comme la fonction f est à valeurs positives, on en déduit immédiatement que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = I$. La fonction f est une fonction impaire et l'égalité $J = \lim_{y \to +\infty} f(y) - \lim_{x \to -\infty} f(x)$ fait apparaître que $J = \sqrt{\pi}$.

▷ Quatrième partie

1. On procède au célèbre changement de variables en coordonnées polaires($\mathcal{C}^1$) en posant $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$ avec $\rho > 0, \theta \in]-\pi, \pi]$. dont on calcule le déterminant jacobien (on trouve ρ).
   La description de D_R en coordonnées polaires est $\{0 \le \rho \le R,\ \theta \in]-\pi, \pi]\}$ et on obtient par intégrations successives (continuité de l'intégrande sur le domaine d'intégration $[0, R] \times [-\pi, \pi]$) :

$$I_R = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^R e^{-\rho^2} |\rho| d\rho \right) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^R d\theta \underbrace{=}_{\text{parité}} \pi \left(1 - e^{-R^2} \right)$$

2. On connaît la croissance des intégrales doubles à intégrandes positives vis à vis de l'inclusion des domaines d'intégration : il suffit donc de comparer D_R, C_R et $D_{\sqrt{2}R}$:

$$\left| \begin{array}{l} D_R \subset C_R \text{ car } x^2 + y^2 \le R^2 \text{ implique } |x| \le R \text{ et } |y| \le R \\ C_R \subset D_{\sqrt{2}R} \text{ car } |x| \le R \text{ et } |y| \le R \text{ assure que } x^2 + y^2 \le 2R^2 \end{array} \right.$$

   On a donc $I_R \le J_R \le I_{\sqrt{2}R}$. Si $R \to +\infty$, on a vu que $I_R \to \pi$ et il en va de même pour $I_{\sqrt{2}R}$. Il s'ensuit que :

$$\lim_{R \to +\infty} J_R = \pi$$

   Enfin, on note que, en appliquant le théorème de *Fubini* pour les intégrales doubles sur le pavé $[0, R] \times [0, R]$ (dont l'hypothèse essentielle de continuité est remplie par l'intégrande), puis utilisant la linéarité de l'intégrale, on peut écrire :

$$J_R = \left(\int_{-R}^{R} e^{-u^2} du \right)^2 = \left(2 \int_0^R e^{-u^2} du \right)^2$$

   d'où l'on déduit facilement que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Schéma représentant l'emboîtement des domaines d'intégration :