❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte.

Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Les parties du problème sont indépendantes.

1 feuille de papier millimétré à rendre non-pliée avec les copies en fin d'épreuve.

PARTIE A

Dans cette partie, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\,\vec{\jmath},\,\vec{k})$.
On considère les quadriques $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ d'équations cartésiennes respectives :

$$4x^2+9y^2+16z^2=144\ ;\ 4x^2-9y^2-16z^2=144\ ;\ 3x^2+3z^2+4xy-4yz+2zx-1=0.$$

1. Déterminer la nature des quadriques $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$.
2. Déterminer la matrice A de la forme quadratique associée à la quadrique $\mathcal{Q}_3$.
3. Calculer les valeurs propres de A, on les notera $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 > \lambda_3$.
4. On notera E_i le sous-espace propre associé à λ_i. Déterminer $E_1,\ E_2,\ E_3$ puis une base orthonormée directe $(\vec{u_1},\,\vec{u_2},\,\vec{u_3})$ où $\vec{u_i}$ désigne un vecteur propre associé à λ_i.
5. Donner une équation réduite de $\mathcal{Q}_3$ dans $(O\,;\vec{u_1},\,\vec{u_2},\,\vec{u_3})$.
   En déduire la nature de $\mathcal{Q}_3$ et déterminer son axe de révolution.

PARTIE B

Le plan euclidien orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\,\vec{v})$.
Soit Γ la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$:

$$\begin{cases} x(t)=2\,\mathrm{ch}(t) \\ y(t)=3\,\mathrm{sh}(t) \end{cases}$$

1. Montrer que Γ est une portion de conique dont on précisera la nature et l'excentricité.
2. Former une équation cartésienne de chacune des asymptotes de Γ.
   Tracer proprement la courbe Γ et ses asymptotes.
3. Déterminer le repère de Frenet $\left(M(t)\ ;\ \overrightarrow{T(t)},\,\overrightarrow{N(t)}\right)$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.
4. Déterminer le rayon de courbure $R(t)$ au point $M(t)$ de la courbe Γ.
5. On définit le centre de courbure $C(t)$ au point $M(t)$ par la relation :

   $$\overrightarrow{OC(t)}=\overrightarrow{OM(t)}+R(t)\cdot\overrightarrow{N(t)}.$$

   Déterminer les coordonnées du centre de courbure $C(t)$.

   On note Γ' la courbe ayant pour représentation paramétrique $t \mapsto M(t)$:

   $$\begin{cases} x(t)=\dfrac{13}{2}\,\mathrm{ch}^3(t) \\ y(t)=-\dfrac{13}{3}\,\mathrm{sh}^3(t) \end{cases}$$

6. Montrer que Γ' possède un axe de symétrie.
7. Étudier la courbe Γ' au point $C(0)$.

8. Étudier les branches infinies de Γ' et comparer leurs directions à celles des asymptotes de Γ.
9. Tracer Γ' sur la même figure que Γ.
10. (a) Montrer les relations :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(2t) &= \mathrm{ch}^2(t) + \mathrm{sh}^2(t) = 2\mathrm{ch}^2(t) - 1 = 2\mathrm{sh}^2(t) + 1 \ ; \\ \mathrm{sh}(2t) &= \mathrm{sh}(t)\mathrm{ch}(t). \end{aligned}$$

    (b) Calculer la longueur de l'arc de Γ' correspondant à $0 \leq t \leq 1$.

PARTIE C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\,\vec{j})$, on considère l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ d'équation $xy = 6$.
On considère le point P de $\mathcal{H}$ d'abscisse 2 et le point Q, symétrique de P par rapport au point O.

1. Dans cette question, on considère le polynôme R, défini par :

$$R = X^3 + aX^2 + bX + c \quad ; \quad (a,\, b,\, c) \in \mathbb{C}^3.$$

   On désignera par α_1, α_2 et α_3 ses racines, éventuellement confondues.
   Exprimer $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1$ et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ en fonction de a, b et c.
2. Déterminer l'excentricité de $\mathcal{H}$.
3. Donner les coordonnées des points P et Q et vérifier que Q appartient à $\mathcal{H}$.
4. Former une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre P, passant par Q.
5. Former l'équation aux abscisses (d'inconnue x) traduisant la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point de $\mathcal{H}$ appartienne à $\mathcal{C}$.
6. Vérifier que l'on peut factoriser l'équation polynomiale d'inconnue x précédente sous la forme : $(x+2)U(x) = 0$, où U désigne un polynôme de degré 3 que l'on déterminera.
7. Calculer $U(-2)$ et $U(1)$. En déduire que le polynôme U possède 3 racines réelles distinctes deux à deux distinctes que l'on ne calculera pas. On les notera r_1, r_2, r_3.
8. En déduire que le cercle $\mathcal{C}$ rencontre $\mathcal{H}$ en trois points deux à deux distincts M_1, M_2 et M_3. Exprimer les coordonnées de ces points en fonction des réels r_1, r_2, r_3. Vérifier qu'ils sont distincts de Q.
9. On considère le triangle $M_1M_2M_3$. Déterminer les coordonnées de son centre de gravité. Qu'en déduisez-vous ?