Banque PT 2007 — épreuve B

Partie I

Question I.1

I.1.a On reconnaît une équation réduite d'un cône à base elliptique de sommet O.

I.1.b Si $\alpha = 0$, l'intersection est réduite au point O. Si $\alpha \neq 0$, on reconnaît une ellipse centrée en $\Omega(0,0,\alpha)$, de grand axe dirigé par $\vec{\imath}$ et de petit axe dirigé par $\vec{\jmath}$.
L'ellipse obtenue pour $\alpha = 1$ a pour équation $x^2 + 2y^2 = 1$, ses sommets sont $(1,0,1)$ et $(-1,0,1)$ sur le grand axe et $(0, 1/\sqrt{2}, 1)$ et $(0, -1/\sqrt{2}, 1)$ sur le petit axe.

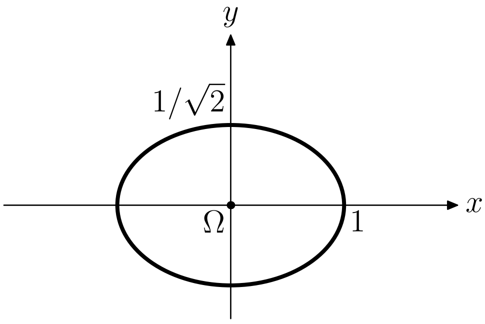

Figure 1 l'ellipse obtenue pour $\alpha = 1$

I.1.c Si $\alpha = 0$, on reconnaît la réunion de deux droites sécantes : $\begin{cases} x = 0 \\ z = y\sqrt{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ z = -y\sqrt{2} \end{cases}$.
Si $\alpha \neq 0$, on reconnaît dans l'équation $z^2 - 2y^2 = \alpha^2$ celle d'une hyperbole centrée en $\Omega(\alpha, 0, 0)$, son axe focal est parallèle à l'axe des z.
Si $\alpha = 1$, ses sommets sont les points $(1, 0, \pm 1)$, ses asymptotes ont pour équations (dans le plan $x = 1$, bien sûr) $z = \pm y\sqrt{2}$.

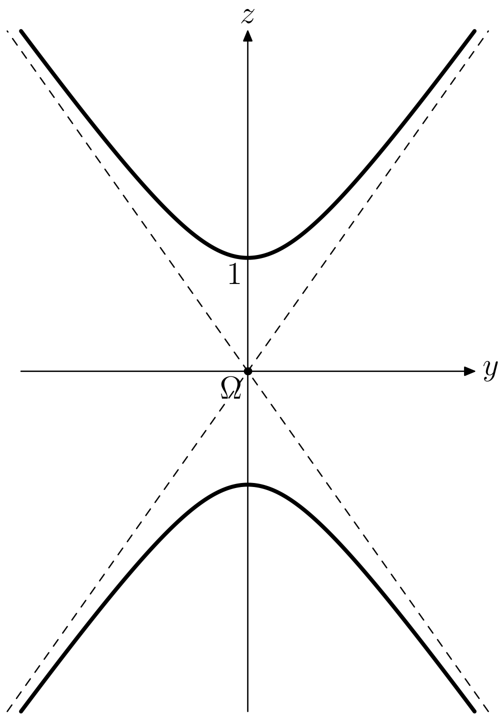

Figure 2 l'hyperbole obtenue pour $\alpha = 1$

Question I.2

I.2.a Bien sûr, $(x+z)^2 - (x-z)^2 = 4xz$.

I.2.b   On en déduit que $q(x,y,z) = y^2 + \left(\frac{x+z}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x-z}{\sqrt{2}}\right)^2$.

I.2.c   Posant $X = \frac{x+z}{\sqrt{2}}$, $Y = y$ et $Z = \frac{x-z}{\sqrt{2}}$, on a bien $q(x,y,z) = X^2 + Y^2 - Z^2$, qui est de la forme requise avec $a = b = 1$. La transformation ϕ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$: on vérifie qu'il s'agit bien d'une matrice orthogonale. Elle est symétrique, et de trace égale à 1 : l'application ϕ est donc une réflexion.

Question I.3

À l'aide de la transformation précédente, l'équation de S_1 devient, dans la nouvelle base : $X^2 + Y^2 - Z^2 - \sqrt{2}(X + Z) = 0$, ce qui peut encore se réécrire $(X - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + Y^2 - (Z + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 = 0$.

On reconnaît un cône de révolution dont l'axe est dirigé par l'axe des Z. Son sommet (qui est aussi le centre) a pour coordonnées $X = 1/\sqrt{2}$, $Y = 0$ et $Z = -1/\sqrt{2}$ ou encore, dans le repère initial : $(x,y,z) = (0,0,1)$. (On aurait pu le trouver aussi à l'aide d'un gradient.)

Question I.4

$\mathcal{P}_1$ a pour équation (dans le plan xOy) : $y^2 = 2x$, il s'agit donc d'une parabole d'axe Oy et de sommet O.

Question I.5

Notons $B(1,1,1)$ le sommet du cône. Un point courant P_t de $\mathcal{P}_1$ a pour coordonnées $(t^2/2, t, 0)$, donc un point générique $M(t,\lambda)$ du cône $\mathcal{C}_1$ vérifie $\overrightarrow{BM} = \lambda\overrightarrow{BP_t}$ ou encore $\begin{cases} x = 1 + \lambda(t^2/2 - 1) \\ y = 1 + \lambda(t - 1) \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ et il n'est pas difficile d'éliminer les paramètres t et λ pour obtenir une équation cartésienne du cône $\mathcal{C}_1$: $2\frac{x-z}{1-z} = \left(\frac{y-z}{1-z}\right)^2$ ou, si l'on préfère : $2(x-z)(1-z) = (y-z)^2$.

Question I.6

On procède comme précédemment, obtenant d'abord une paramétrisation du cône $\mathcal{C}_A$ sous la forme $\begin{cases} x = x_A + \lambda(t^2/2 - x_A) \\ y = y_A + \lambda(t - y_A) \\ z = z_A - \lambda z_A \end{cases}$ puis éliminant tour à tour $\lambda = 1 - z/z_A$ et t. Finalement, on obtient l'équation cartésienne suivante :

$$\mathcal{C}_A : \quad 2(x - x_A\frac{z}{z_A})(1 - \frac{z}{z_A}) = \left(y - y_A\frac{z}{z_A}\right)^2.$$

Le point B est sur $\mathcal{C}_A$ si et seulement si $2(z_A - x_A)(z_A - 1) = (z_A - y_A)^2$. On remarque que cela signifie que A est sur le cône $\mathcal{C}_1$.

Soit Σ l'ensemble des sommets A des cônes contenant $\mathcal{P}_1$ et B : si $z_A \neq 0$, on vient de dire que A doit être sur le cône $\mathcal{C}_1$; si $z_A = 0$, le cône de sommet A qui contient $\mathcal{P}_1$ est en réalité le plan xOy, qui ne passe pas par B. Finalement Σ est l'ensemble des points du cône $\mathcal{C}_1$ qui ne sont pas dans le plan xOy, c'est-à-dire exactement : $\Sigma = \mathcal{C}_1 \setminus \mathcal{P}_1$.

Partie II

Question II.1

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des paraboloïdes de révolution d'axe Oz et de sommet O. Le plan xOy est tangent au sommet de ces deux paraboloïdes : $\mathcal{P}$ est du côté des $z \geqslant 0$ et $\mathcal{Q}$ du côté des $z \leqslant 0$.
$\mathcal{P}$ est plus évasé que $\mathcal{Q}$.

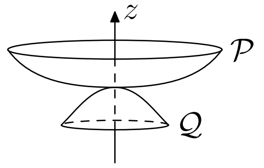

Figure 3 schéma présentant $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$

Question II.2

La méridienne contenue dans le plan xOz a pour équation $x^2 = 8z$: c'est une parabole d'axe Oz et de sommet O. La surface étant de révolution autour de Oz, il en est de même de toutes les méridiennes.
La méridienne choisie passe par le point $(a, 0, a^2/8)$: un vecteur tangent en ce point est $(1, 0, a/4)$. Une équation de la tangente (dans le plan xOz) est donc $a(x - a) = 4(z - a^2/8)$. Cette tangente coupe le plan $z = 0$ au point $(a/2, 0, 0)$.
Soit M' la méridienne de Q contenue dans le plan xOz : c'est une parabole d'équation $x^2 = -2z$.
Or une droite passant par $(a/2, 0, 0)$ avec $a > 0$ est

- ▷ tangente à M' en O si sa pente est nulle ;
- ▷ tangente à M' en un point d'abscisse positive si sa pente est égale à une certaine valeur $p < 0$;
- ▷ d'intersection vide avec M' si sa pente est dans l'intervalle $]p, 0[$;
- ▷ d'intersection avec M' réduite au point $(a/2, 0, -a^2/8)$ si elle est verticale ;
- ▷ d'intersection avec M' réduite à un point si sa pente est dans l'intervalle $]-\infty, p[$;
- ▷ sécante avec M' en deux points distincts si sa pente est strictement positive.

Nous sommes ici dans le dernier cas.
L'ensemble de la figure étant de révolution autour de Oz, la propriété est également valable pour toute les tangentes à n'importe quelle méridienne de $\mathcal{P}$, à l'exception bien sûr des tangentes au point O (qui sont horizontales).

Question II.3

La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ s'obtient à partir de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ par une rotation d'angle θ autour de Oz, rotation qui conserve $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Autrement dit, les équations cartésiennes de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ dans le nouveau repère sont les mêmes que dans l'ancien.

Question II.4

Comme $x^2 + y^2 = r^2$, on a simplement $z = \dfrac{r^2}{8}$ comme équation paramétrique de $\mathcal{P}$ en coordonnées cylindriques.

Question II.5

Il suffit de vérifier que les coordonnées du point courant de $\mathcal{C}$ vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Question II.6

Les coordonnées de $\dfrac{d\vec{t}}{d\theta}$ dans la base fixe sont $(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta, \dfrac{r'(\theta)r(\theta)}{4})$ et, dans la base tournante, ce sont $(r'(\theta), r(\theta), \dfrac{r'(\theta)r(\theta)}{4})$.
La courbe est régulière si ce vecteur dérivé ne s'annule jamais, c'est-à-dire si r et r' ne s'annulent jamais simultanément.

Question II.7

Notons (x_1, y_1, z_1) les coordonnées dans le repère tournant $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$.

La tangente est dirigée par le vecteur dérivé que nous venons de calculer. Une représentation paramétrique est donc : $\begin{cases} x_1 = r(\theta) + \lambda r'(\theta) \\ y_1 = \lambda r(\theta) \\ z_1 = \dfrac{r^2(\theta) + 2\lambda r'(\theta) r(\theta)}{8} \end{cases}$

Question II.8
Or $\mathcal{Q}$ a pour équation $x_1^2 + y_1^2 + 2z_1 = 0$: reportant les valeurs précédentes dans cette équation, on obtient une équation (e) du second degré en λ, qui a donc au plus deux solutions. C'est dire que $D_\theta \bigcap \mathcal{Q}$ contient au plus deux points.

Question II.9
Il suffit de faire le calcul : (e) s'écrit

$$(e) \quad \lambda^2(r^2 + r'^2) + 2\lambda r r' + r^2 + \frac{r^2}{4} + \lambda \frac{rr'}{2} = 0 \iff \lambda^2(r^2 + r'^2) + 5\lambda \frac{rr'}{2} + \frac{5r^2}{4} = 0.$$

D_θ est tangente à $\mathcal{Q}$ si et seulement si le discriminant Δ de cette équation du second degré est nul.
Or $\Delta = \dfrac{25r^2r'^2}{4} - 5r^4 - 5r^2r'^2 = \dfrac{5}{4}r^2(r'^2 - 4r^2)$. D_θ est donc tangente à $\mathcal{Q}$ si et seulement si $r(\theta) = 0$ ou $r'(\theta)^2 = 4r(\theta)^2$.

Partie III

Notons encore $\vec{u} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$.

Question III.1
Au point de paramètre θ, on écrit $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}$ donc $\vec{M}' = \rho'\vec{u} + \rho\vec{v} = e^{2\theta}(2\vec{u} + \vec{v})$. C'est-à-dire que la tangente est dirigée par le vecteur $2\vec{u} + \vec{v} = (2\cos\theta - \sin\theta)\vec{\imath} + (2\sin\theta + \cos\theta)\vec{\jmath}$.
On en déduit que la pente de la tangente vaut $\dfrac{2\tan\theta + 1}{2 - \tan\theta}$.

Question III.2
On a $\lim\limits_{\theta\to-\infty} \rho(\theta) = 0$ et $\lim\limits_{\theta\to+\infty} \rho(\theta) = +\infty$: c'est dire que la courbe est une spirale qui s'enroule autour de l'origine et se déroule à l'infini.

Question III.3
Cette longueur vaut $\ell = \displaystyle\int_0^\pi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\theta = \int_0^\pi e^{2\theta}\sqrt{5}\, d\theta = \sqrt{5}\frac{e^{2\pi} - 1}{2}$. On a écrit au passage, avec les notations usuelles : $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{5}e^{2\theta}$.

Question III.4
L'aire demandée vaut $\mathcal{A} = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\rho^2}{2}\, d\theta = \int_0^\pi \frac{e^{4\theta}}{2}\, d\theta = \frac{e^{4\pi} - 1}{8}$ unités d'aire.

Question III.5
On a déjà dit que le vecteur tangent unitaire est $\vec{T} = \dfrac{2\vec{u} + \vec{v}}{\sqrt{5}}$, donc le vecteur normal est $\vec{N} = \dfrac{-\vec{u} + 2\vec{v}}{\sqrt{5}}$.

Question III.6
Pour trouver la courbure c, on peut évaluer $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = c\vec{N}$.
Or $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{5}e^{2\theta}} \dfrac{2\vec{v} - \vec{u}}{\sqrt{5}}$ et le rayon de courbure cherché vaut $R = \dfrac{1}{c} = \sqrt{5}e^{2\theta}$.

Question III.7
Une des définitions de la développée est qu'il s'agit de l'ensemble des centres de courbure.
Ici on calcule donc $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N} = e^{2\theta}\vec{u} + \sqrt{5}e^{2\theta}\dfrac{-\vec{u} + 2\vec{v}}{\sqrt{5}} = 2e^{2\theta}\vec{v}$.
C'est dire que la développée de Γ s'obtient à partir de Γ par une homothétie de rapport 2 composée avec une rotation de $+\pi/2$ (pour passer de $\vec{u}$ à $\vec{v}$).

Question III.8
On a tracé la courbe Γ en noir et sa développée en tireté rouge.

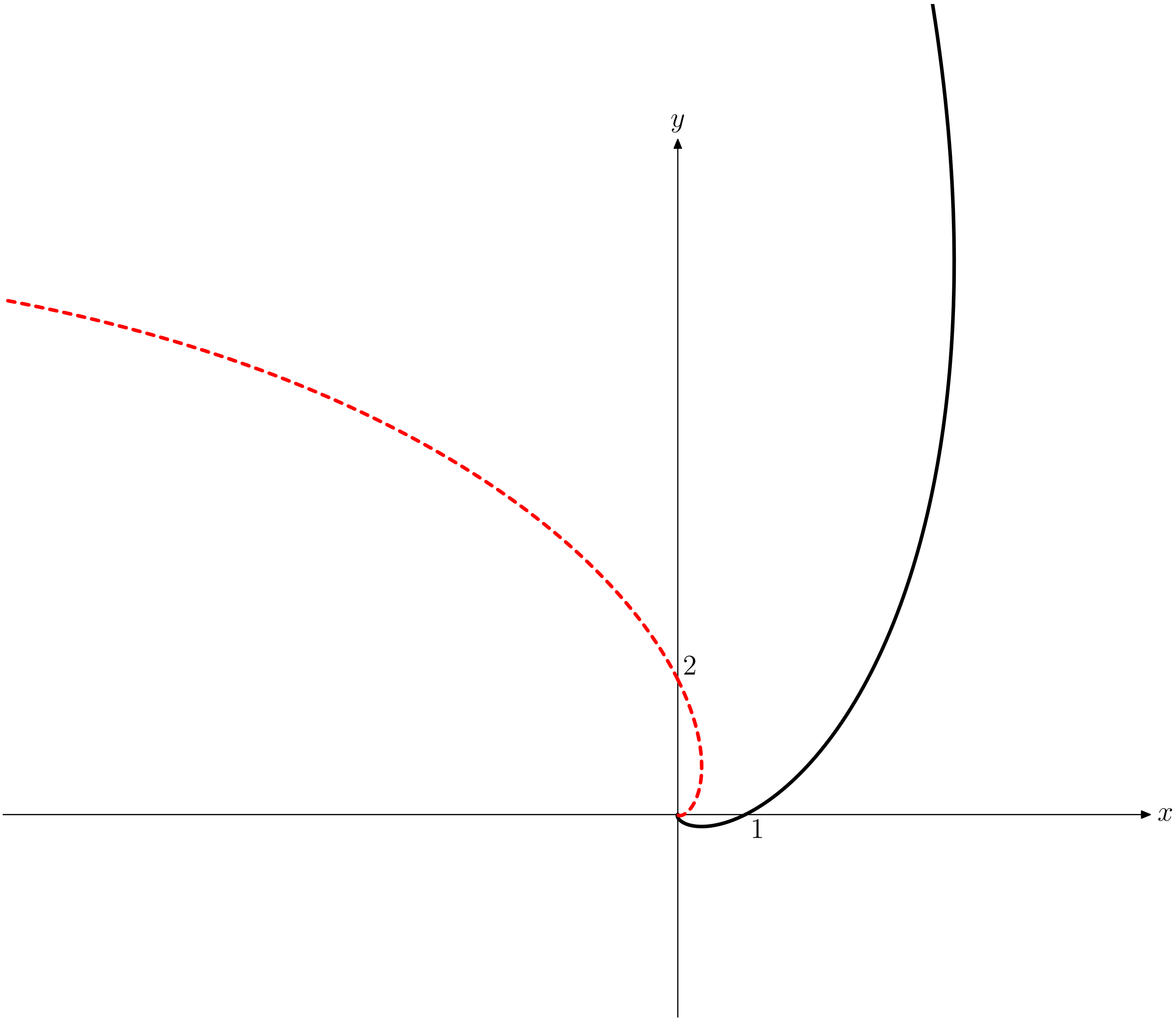

Figure 4 Γ et sa développée