Banque PT 2005 – Épreuve B : corrigé

PARTIE I

1. Si $|k| < 1$, la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\chi(\varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$ existe pour tout φ de $\mathbb{R}$.

Si $|k| = 1$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \dfrac{1}{|\cos u|}$ est continue et positive sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Notons $h = \pi/2 - u$, pour u dans $[0, \pi/2[$. $|\cos u| = \cos u = \sin h \underset{0}{\sim} h$ donc $\dfrac{1}{|\cos u|} \underset{\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{1}{\pi/2 - u}$. La divergence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\pi/2 - u}$ entraîne celle de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$.

On procède de même pour montrer la divergence de $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$.

Il en résulte que $\chi(\varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}u}{|\cos u|}$ existe si et seulement si $\varphi \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

$$\boxed{D_\chi = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } |k| < 1 \\ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \text{si } |k| = 1 \end{cases}}$$

L'ensemble de définition de χ est symétrique par rapport à 0 et en faisant le changement de variable $v = -u$, on a, pour tout φ de D_χ :

$\chi(-\varphi) = \displaystyle\int_0^{-\varphi} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \int_0^{\varphi} \frac{-\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1-k^2\sin^2 v}} = -\chi(\varphi)$ donc $\boxed{\chi \text{ est impaire.}}$

La fonction $\varphi \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ est continue sur D_χ, donc χ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_χ, et pour tout φ de D_χ,

$\chi'(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} > 0$, donc $\boxed{\chi \text{ est strictement croissante sur } D_\chi.}$

Par la relation de Chasles, $\chi(\varphi+\pi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} + \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \chi(\varphi) + \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$.

Comme la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$ est π-périodique, $\chi(\varphi+\pi) = \chi(\varphi) + \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$

et comme elle est paire, $\chi(\varphi+\pi) = \chi(\varphi) + 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \chi(\varphi) + 2\chi(\pi/2)$

$$\boxed{\chi(\varphi+\pi) = \chi(\varphi) + 2\,C.}$$

2. Soit $n \geq 1$. En intégrant par parties :

$$L_n = \int_0^{\pi/2} \left(\sin v\right)^{2n} \mathrm{d}v = \Big[(-\cos v)(\sin v)^{2n-1}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos v)(2n-1)(\sin v)^{2n-2}\cos v \,\mathrm{d}v$$

$$= (2n-1)\int_0^{\pi/2} (\sin v)^{2n-2}\left(1-(\sin v)^2\right)\,\mathrm{d}v = (2n-1)\left(L_{n-1} - L_n\right)$$

d'où : $2n\,L_n = (2n-1)\,L_{n-1}$. Comme $L_0 = \pi/2$, on en déduit, par récurrence, que

$$\boxed{L_n = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\,\frac{\pi}{2}.}$$

En utilisant le développement en série entière de $t \mapsto (1+t)^\gamma$ de rayon de convergence 1 pour $\gamma = -1/2$ et $t = -k^2\sin^2 u$, on obtient, pour tout $(k,u) \in \left]-1,1\right[\times [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}\,(-k^2\sin^2 u)^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2^n n!}\,(-1)^n k^{2n}\sin^{2n} u$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times\cdots\times(2n)}\,k^{2n}\sin^{2n} u = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} L_n\,k^{2n}\sin^{2n} u$$

En scindant en somme partielle de rang N et reste, cela donne : $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{N} L_n\, k^{2n}\sin^{2n} u + \rho_N(u)$

où $|\rho_N(u)| = \dfrac{2}{\pi}\left|\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} L_n\, k^{2n}\sin^{2n} u\right| \leq \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} L_n k^{2n}$.

La majoration précédente est licite car $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} L_n k^{2n}$ est le reste d'ordre N d'une série convergente, de somme $\dfrac{1}{\sqrt{1-k^2}}$ si on indexe à partir de 0 (calcul précédent pour $u=\pi/2$).

Grâce à la linéarité de l'intégrale, on en déduit : $\forall k \in \,]-1,1[$,

$$C = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{N} L_n\, k^{2n}\int_0^{\pi/2}(\sin u)^{2n}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\pi/2}\rho_N(u)\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{N} L_n^2\, k^{2n} + R_N$$

où $|R_N| = \left|\displaystyle\int_0^{\pi/2}\rho_N(u)\,\mathrm{d}u\right| \leq \displaystyle\int_0^{\pi/2}|\rho_N(u)|\,\mathrm{d}u \leq \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} L_n k^{2n} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ (reste d'une série convergente).

A fortiori, $\displaystyle\lim_{N\to\infty} R_N = 0$. Le passage à la limite dans l'égalité $C = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{N} L_n^2\, k^{2n} + R_N$ montre que C est développable en série entière de la variable k.

Comme $\dfrac{L_n}{L_{n-1}} = \dfrac{2n-1}{2n}$, le rayon de convergence de la série entière est 1, par la règle de d'Alembert.

$$\boxed{\forall k \in \,]-1,1[\,, \quad C = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} L_n^2\, k^{2n}.}$$

3. On a vu au 1. que la fonction χ est strictement croissante sur son domaine de définition. A fortiori,

$$\boxed{\chi \text{ est injective sur son domaine de définition.}}$$

Si $|k|<1$, alors pour tout φ de $\mathbb{R}$, $\chi(\varphi+\pi) = \chi(\varphi) + 2\,C$ avec $C>0$ comme intégrale d'une fonction continue strictement positive sur un segment. Par récurrence on obtient : pour tout n de $\mathbb{N}$, $\chi(\varphi+n\pi) = \chi(\varphi)+2n\,C$ et en particulier $\chi(n\pi) = \chi(0)+2n\,C = 2n\,C \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

La fonction χ est donc non bornée, et comme elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\displaystyle\lim_{\varphi\to+\infty}\chi(\varphi) = +\infty$.

Par parité, $\displaystyle\lim_{\varphi\to-\infty}\chi(\varphi) = -\infty$.

χ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\chi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc χ est dans ce cas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Si $|k|=1$, alors $\chi(\varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$ est l'intégrale d'une fonction positive telle que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{\cos u}$ soit divergente, donc $\displaystyle\lim_{\varphi\to\pi/2}\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}u}{\cos u} = +\infty$. Par parité, $\displaystyle\lim_{\varphi\to-\pi/2}\chi(\varphi) = -\infty$.

χ est continue, strictement croissante sur $]-\pi/2,\pi/2[$, $\chi\left(]-\pi/2,\pi/2[\right) = \mathbb{R}$, donc χ est dans ce cas une bijection de $]-\pi/2,\pi/2[$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction réciproque } \phi \text{ est définie sur } \mathbb{R}, \text{ impaire et strictement croissante.}}$$

Pour k de valeur absolue strictement inférieure à 1, soit $x\in\mathbb{R}$, et $\varphi = \phi(x)$. On a donc $x = \chi(\varphi)$.

L'égalité $\chi(\varphi+\pi) = \chi(\varphi)+2\,C$ équivaut à : $\varphi+\pi = \phi\big(\chi(\varphi)+2\,C\big)$ soit encore à $\phi(x)+\pi = \phi(x+2\,C)$.

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \phi(x+2C) = \phi(x)+\pi.}$$

4. Par composition, les trois fonctions α_k, β_k et γ_k sont définies sur $\mathbb{R}$, α_k est impaire, β_k et γ_k sont paires.

On a vu de plus que la fonction χ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, et pour tout φ de D_χ, $\chi'(\varphi)\neq 0$.

Donc la fonction réciproque ϕ est elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout x de $\mathbb{R}$, $\phi'(x) = \dfrac{1}{\chi'(\phi(x))}$.

Par composition, les trois fonctions α_k, β_k et γ_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: c'est clair pour α_k et β_k, et pour γ_k si $|k|<1$. Si $|k|=1$, ϕ est à valeurs dans $]-\pi/2,\pi/2[$ donc $1-k^2\sin^2\big(\phi(x)\big) = \cos^2\big(\phi(x)\big) > 0$ et la composée par la fonction racine carrée est encore de classe $\mathcal{C}^1$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\phi'(x) = \dfrac{1}{\chi'(\phi(x))} = \sqrt{1-k^2\sin^2\big(\phi(x)\big)} = \gamma_k(x)$ donc :

$\alpha_k'(x) = \cos\big(\phi(x)\big)\,\phi'(x) = \beta_k(x)\,\gamma_k(x)$

$\beta_k'(x) = -\sin\big(\phi(x)\big)\,\phi'(x) = -\alpha_k(x)\,\gamma_k(x)$

$\gamma_k'(x) = \dfrac{-2k^2\sin\big(\phi(x)\big)\cos\big(\phi(x)\big)\,\phi'(x)}{2\sqrt{1-k^2\sin^2\big(\phi(x)\big)}} = -k^2\alpha_k(x)\,\gamma_k(x)$

$$\boxed{\alpha_k' = \beta_k\,\gamma_k \quad \beta_k' = -\alpha_k\,\gamma_k \quad \gamma_k' = -k^2\alpha_k\,\beta_k}$$

5. Pour $k=0$, on a, pour tout φ de $\mathbb{R}$: $\chi(\varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi} 1\,\mathrm{d}u = \varphi$. D'où pour tout x de $\mathbb{R}$: $\phi(x) = x$, et donc :

$$\boxed{\alpha_0 = \sin \quad \beta_0 = \cos}$$

6. Pour $k=1$, on a, pour tout φ de $]-\pi/2,\pi/2[$: $\chi(\varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi}\frac{1}{\cos u}\,\mathrm{d}u = \Big[\ln\Big|\tan\Big(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big|\Big]_0^{\varphi} = \ln\Big(\tan\Big(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\Big)\Big)$.

Donc pour tout x de $\mathbb{R}$: $\phi(x) = \varphi$ avec $\begin{cases}\tan\big(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\big) = e^x\\ \varphi\in\,]-\pi/2,\pi/2[\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{\varphi}{2}+\dfrac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}(e^x) \Leftrightarrow \varphi = 2\,\mathrm{Arctan}(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$

d'où : $\phi(x) = 2\,\mathrm{Arctan}(e^x) - \dfrac{\pi}{2}$.

$\alpha_1(x) = \sin\Big(2\,\mathrm{Arctan}(e^x) - \dfrac{\pi}{2}\Big) = -\cos\big(2\,\mathrm{Arctan}(e^x)\big) = -\dfrac{1-\tan^2\big(\mathrm{Arctan}(e^x)\big)}{1+\tan^2\big(\mathrm{Arctan}(e^x)\big)} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \mathrm{th}\,x$

$\beta_1(x) = \cos\Big(2\,\mathrm{Arctan}(e^x) - \dfrac{\pi}{2}\Big) = \sin\big(2\,\mathrm{Arctan}(e^x)\big) = \dfrac{2\tan\big(\mathrm{Arctan}(e^x)\big)}{1+\tan^2\big(\mathrm{Arctan}(e^x)\big)} = \dfrac{2e^x}{e^{2x}+1} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}$

$\gamma_1(x) = \beta_1(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,x}$

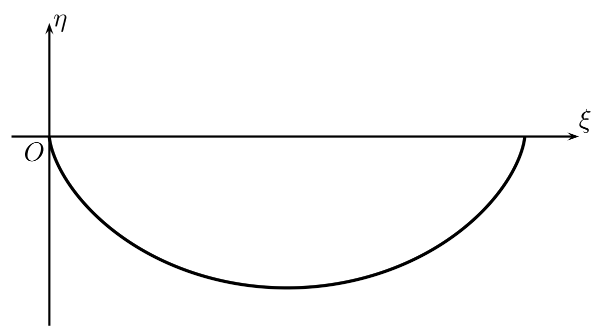
$$\boxed{\alpha_1 = \mathrm{th} \quad \beta_1 = \gamma_1 = \frac{1}{\mathrm{ch}}}$$

PARTIE II

1. $\Gamma\begin{cases}\xi(u) = a(\pi+u+\sin u)\\ \eta(u) = a(-1-\cos u)\end{cases}$, $u\in[-\pi,\pi]$. Pour tout u de $[-\pi,\pi]$, $\dfrac{M(u)+M(-u)}{2}$ a pour coordonnées $\begin{cases}a\pi\\ \eta(u)\end{cases}$ donc Γ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a\pi$, et il suffit d'étudier Γ sur $[0,\pi]$.

$\begin{cases}\xi'(u) = a(1+\cos u) = 2a\cos^2\frac{u}{2}\\ \eta'(u) = a\sin u = 2a\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\end{cases}$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}u} = 2a\cos\dfrac{u}{2}\,\overrightarrow{T}$ avec $\overrightarrow{T}\begin{pmatrix}\cos\frac{u}{2}\\ \sin\frac{u}{2}\end{pmatrix}$ unitaire donc la tangente en tout point est dirigée par $\overrightarrow{T}$. En particulier, la tangente en $M(0)$ est dirigée par $\vec{\imath}$, celles en $M(-\pi)$ et $M(\pi)$ par $\vec{\jmath}$.

u	0		π
$\xi'(u)$	$2a$	$+$	0
$\xi(u)$	$\pi\,a$	$\nearrow$	$2\pi\,a$
$\eta'(u)$	0	$-$	0
$\eta(u)$	$-2a$	$\nearrow$	0



2. Pour tout u de $[-\pi,\pi]$ $2a\cos\frac{u}{2}\geq 0$ donc $s(u) = \displaystyle\int_0^u 2a\cos\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \boxed{4a\sin\frac{u}{2}}$

La longueur de Γ est $\lambda(\Gamma) = s(\pi) - s(-\pi) = \boxed{8a}$

3. $\psi(u) = \big(\vec{\jmath},\overrightarrow{T}\big) = (\vec{\jmath},\vec{\imath}) + \big(\vec{\imath},\overrightarrow{T}\big) = -\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{u}{2}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\tau^2}(\tau) = -g\cos\psi(u(\tau)) = -g\sin\dfrac{u(\tau)}{2}$

et comme $\sigma(\tau) = s\big(u(\tau)\big) = 4a\sin\dfrac{u(\tau)}{2}$, on a : $\dfrac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\tau^2}(\tau) + \dfrac{g}{4a}\sigma(\tau) = 0$.

La solution générale de cette équation différentielle est : $\sigma : \tau\mapsto A\cos\sqrt{\dfrac{g}{4a}}\tau + B\sin\sqrt{\dfrac{g}{4a}}\tau$, $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

$\sigma'(\tau) = -A\sqrt{\dfrac{g}{4a}}\sin\sqrt{\dfrac{g}{4a}}\tau + B\sqrt{\dfrac{g}{4a}}\cos\sqrt{\dfrac{g}{4a}}\tau$ donc $\sigma'(0) = 0$ impose $B = 0$.

On a alors $\sigma(0) = \sigma_0$ si et seulement si $A = \sigma_0$.

$$\boxed{\sigma : \tau \mapsto \sigma_0 \cos\sqrt{\frac{g}{4a}}\tau}$$

La période de σ est $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{4a}}} = 4\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$, elle ne dépend pas de σ_0.

PARTIE III

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ est continue et positive sur $]a, b[$.

Au voisinage de a, $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{b-a}(x-a)^{1/2}}$ et par le critère d'équivalence, $\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ converge.

De même, au voisinage de b, $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{b-a}(b-x)^{1/2}}$ d'où la convergence de $\displaystyle\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

$$\boxed{I = \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \text{ est convergente.}}$$

$(x-a)(b-x) = -x^2 + (a+b)\,x - a\,b = \dfrac{(a-b)^2}{4} - \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2$ suggère d'écrire $x \in]a, b[$ sous la forme $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{a-b}{2}\cos t$.

Soit donc le changement de variable défini par $t = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{2}{a-b}\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)\right)$.

$$I = \int_0^\pi \frac{-\dfrac{a-b}{2}\sin t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{-\dfrac{a-b}{2}(1-\cos t)\left(-\dfrac{a-b}{2}\right)(1+\cos t)}} = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}t = \pi$$

$$\boxed{I = \pi}$$

2. Établissons d'abord l'existence de $H(y_0)$ pour tout y_0 de $]0, \pi[$. La fonction $y \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}}$ est continue et positive sur $]-y_0, y_0[$. Au voisinage de y_0,

$$\frac{1}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}} = \frac{1}{\sqrt{-2\sin\frac{y-y_0}{2}\sin\frac{y+y_0}{2}}} \sim \frac{1}{\sqrt{\sin y_0}(y_0-y)^{1/2}} \quad \text{donc par le critère d'équivalence,}$$

$\displaystyle\int_0^{y_0} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}}$ converge.

Par parité, l'intégrale converge aussi à la borne $-y_0$, d'où la convergence de $H(y_0)$.

Toujours par parité, $H(y_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_{-y_0}^{y_0} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}} = \sqrt{2}\int_0^{y_0} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\cos y - \cos y_0}}$ et sur l'intervalle $[0, y_0[$ il est loisible d'utiliser $t = \cos y$ comme nouvelle variable.

$$H(y_0) = \sqrt{2}\int_1^{\cos y_0} \frac{-\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{t - \cos y_0}} = \sqrt{2}\int_{t_0}^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(t-t_0)}}\,\mathrm{d}t \quad \text{en notant } t_0 = \cos y_0.$$

Pour tout t de $]t_0, 1]$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{(1-t)(t-t_0)}}\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{(1-t^2)(t-t_0)}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{(1-t)(t-t_0)}}\dfrac{1}{\sqrt{1+t_0}}$

En intégrant ces inégalités sur $]t_0, 1]$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{t_0}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)(t-t_0)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}H(y_0) \leq \frac{1}{\sqrt{1+t_0}}\int_{t_0}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)(t-t_0)}}$$

D'après le **1.** $\displaystyle\int_{t_0}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)(t-t_0)}} = I = \pi$ donc $\pi \leq H(y_0) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t_0}}\pi = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos y_0}}\pi$.

Comme $\displaystyle\lim_{y_0\to 0}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\cos y_0}}=1$, on en déduit que $H(y_0)$ possède une limite lorsque y_0 tend vers 0, et que

$$\boxed{\lim_{y_0\to 0} H(y_0)=\pi.}$$

3. La fonction $u\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-u^\alpha}}$ est continue et positive sur $[0,1[$. Au voisinage de 1, en posant $u=1-h$, on a : $u^\alpha=(1-h)^\alpha=1-\alpha\,h+o(h)$ donc $1-u^\alpha=\alpha\,h+o(h)=\alpha(1-u)+o(1-u)$

On a donc $\dfrac{1}{\sqrt{1-u^\alpha}}\underset{u\to 1}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}(1-u)^{\frac12}}$ et par le critère d'équivalence,

$$\boxed{\text{pour tout réel } \alpha>0,\quad \int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^\alpha}} \text{ converge.}}$$

$K(2)=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}=\Big[\operatorname{Arcsin} u\Big]_0^1=\frac{\pi}{2}.$

$$\boxed{K(2)=\frac{\pi}{2}}$$

4. En posant $Y_1=y$ et $Y_2=y'$, l'équation $y''=f(y)$ équivaut au système autonome $\begin{cases}Y_1'=Y_2\\ Y_2'=f(Y_1)\end{cases}$, et les conditions initiales $y(t_0)=y_0,\ y'(t_0)=y_0'$ équivalent à $\begin{cases}Y_1(t_0)=y_0\\ Y_2(t_0)=y_0'\end{cases}$.

Une condition suffisante pour que le problème de Cauchy $\begin{cases}Y_1'=Y_2\\ Y_2'=f(Y_1)\\ Y_1(t_0)=y_0\\ Y_2(t_0)=y_0'\end{cases}$ admette, pour tout (t_0,y_0,y_0') de $\mathbb{R}^3$ donné, une solution maximale unique est que la fonction $(Y_1,Y_2)\mapsto\big(Y_2,f(Y_1)\big)$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Cela équivaut à dire que f est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Une condition suffisante pour que le problème (1) admette une}\\ \text{solution maximale unique est que } f \text{ soit de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.\end{array}}$$

5. On a, pour tout t de $\mathbb{R}$, $y''(t)=f\big((y(t)\big)$, donc $2y'(t)\,y''(t)=2f\big((y(t)\big)\,y'(t)$ soit encore $\dfrac{\mathrm{d}y'^2}{\mathrm{d}t}(t)=\dfrac{\mathrm{d}(F\circ y)}{\mathrm{d}t}(t)$ et en prenant les primitives nulles en t_0 : $y'^2(t)-{y_0'}^2=F\big(y(t)\big)$. D'où $y'^2(t)=G\big(y(t)\big)$. Donc, sans hypothèses supplémentaires,

$$\boxed{\text{toute solution de (1) est aussi solution de (2) : } y'^2(t)=G\big(y(t)\big),\ \ y(t_0)=y_0}$$

Les hypothèses sont en fait utiles pour établir une réciproque (non demandée) : si $y'^2(t)=G\big(y(t)\big)$, alors :
– pour $t=t_0$, ${y'}^2(t_0)={y_0'}^2$ et puisque $y'(t_0)$ et y_0' sont de même signe, $y'(t_0)=y_0'$.
– par dérivation, $2y'(t)\,y''(t)=2f\big((y(t)\big)\,y'(t)$ donc sur un intervalle $[t_0-h,t_0+h]$ pour lequel y' garde un signe constant, par continuité y' ne s'annule pas et il vient après simplification $y''(t)=f\big((y(t)\big)$.

6. Si $y'(t_0)=y_0'\neq 0$ alors par continuité, il existe un intervalle J contenant t_0 sur lequel y' garde le signe de y_0'. La fonction y est alors strictement monotone, donc injective sur J.

$$\boxed{\text{Si } y_0'\neq 0 \text{, il existe un intervalle } J \text{ contenant } t_0 \text{ tel que } y \text{ soit injective sur } J.}$$

Pour tout t de J, $y'(t)$ est du signe de ϵ, et $G\big((y(t)\big)={y'}^2(t)>0$.

${y'}^2(t)=G\big((y(t)\big)$ équivaut alors à $\dfrac{y'(t)}{\sqrt{G\big((y(t)\big)}}=\epsilon.$

En prenant les primitives nulles en t_0 : $\displaystyle\int_{t_0}^t\frac{y'(u)}{\sqrt{G\big((y(u)\big)}}\,\mathrm{d}u=\epsilon(t-t_0)$. Comme y est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de J sur $y(J)$, le changement de variable $v=y(u)$ est licite, et on a aussi : $\displaystyle\int_{y_0}^{y(t)}\frac{1}{\sqrt{G(v)}}\,\mathrm{d}v=\epsilon(t-t_0)$. Comme $\epsilon=\pm 1$,

$$\boxed{\text{pour tout } t \text{ de } J,\ \ t-t_0=\int_{y_0}^{y(t)}\frac{\epsilon}{\sqrt{G(v)}}\,\mathrm{d}v.}$$

7. $f : y\mapsto -\omega^2\sin y$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et nous sommes dans les conditions d'application du **6.** avec $t_0=y_0=0$, $y_0'=\mu\,\omega>0$ et $\epsilon=1$. Il existe donc un intervalle J contenant 0 tel que pour tout t de J,

$$t-t_0=\int_0^{y(t)}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\displaystyle\int_0^v\big(-2\omega^2\sin u\big)\,\mathrm{d}u+\mu^2\omega^2}}=\int_0^{y(t)}\frac{\mathrm{d}v}{\omega\sqrt{\big[2\cos u\big]_0^v+\mu^2}}=\int_0^{y(t)}\frac{\mathrm{d}v}{\omega\,\mu\sqrt{1-\frac{2}{\mu^2}(1-\cos v)}}$$

$$=\int_0^{y(t)}\frac{\mathrm{d}v}{\omega\,\mu\sqrt{1-\frac{4}{\mu^2}\sin^2\frac{v}{2}}}\underset{(\varphi=v/2)}{=}\int_0^{y(t)/2}\frac{2\,\mathrm{d}\varphi}{\omega\,\mu\sqrt{1-\frac{4}{\mu^2}\sin^2\varphi}}=\frac{2}{\omega\,\mu}\,\chi\big(y(t)/2\big)$$

avec $k=\pm\dfrac{2}{\mu}\in\,]-1,1[$.

$$\chi\big(y(t)/2\big)=\frac{\omega\,\mu}{2}\,(t-t_0)\Leftrightarrow\frac{y(t)}{2}=\phi\Big(\frac{\omega\,\mu}{2}\,(t-t_0)\Big)\text{ d'où }\sin\big(y(t)/2\big)=\sin\Big(\phi\big(\frac{\omega\,\mu}{2}\,(t-t_0)\big)\Big)=\alpha_k\Big(\frac{\omega\,\mu}{2}\,(t-t_0)\Big)$$

$$\boxed{\exists J\text{ intervalle contenant 0 tel que pour tout } t \text{ de } J,\quad \sin\big(y(t)/2\big)=\alpha_k\big(\mu\,\omega\,(t-t_0)/2\big)}$$

8. a. La fonction $v\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{G(v)}}$ est continue, positive sur $]y_0,y_1[$. G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle, et par la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 au voisinage de y_0, on a :

$G(v)=G(y_0)+(v-y_0)\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(y_0)+o(v-y_0)$ donc $G(v)\underset{y_0}{\sim}(v-y_0)\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(y_0)$ et de plus, comme $G(y)$ est strictement positif sur $]y_0,y_1[$, on a $\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(y_0)>0$. Donc $\dfrac{1}{\sqrt{G(v)}}\underset{y_0}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{G'(y_0)}(v-y_0)^{\frac12}}$. Grâce au critère d'équivalence pour les intégrales impropres de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{y_0}^{\frac{y_0+y_1}{2}}\frac{1}{\sqrt{G(v)}}\,\mathrm{d}v$ est convergente.

On a de même, au voisinage de y_1, $G(v)\underset{y_1}{\sim}(v-y_1)\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(y_1)$ ce qui implique :

$\dfrac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}y}(y_1)<0$ et $\dfrac{1}{\sqrt{G(v)}}\underset{y_1}{\sim}\dfrac{1}{\sqrt{-G'(y_1)}(y_1-v)^{\frac12}}$ d'où la convergence de $\displaystyle\int_{\frac{y_0+y_1}{2}}^{y_1}\frac{1}{\sqrt{G(v)}}\,\mathrm{d}v$.

$$\boxed{\int_{y_0}^{y_1}\frac{1}{\sqrt{G(v)}}\,\mathrm{d}v\text{ est convergente.}}$$

b. Soit t dans $[t_0,t_1]$. Il existe un réel y et un seul dans $[y_0,y_1]$ tel que $t-t_0=\displaystyle\int_{y_0}^{y}\frac{1}{\sqrt{G(v)}}\,\mathrm{d}v$. En effet, la fonction $y\mapsto t_0+\displaystyle\int_{y_0}^{y}\frac{1}{\sqrt{G(v)}}\,\mathrm{d}v$ est continue, strictement croissante sur $[y_0,y_1]$, donc bijective, et son image de $[y_0,y_1]$ est $[t_0,t_1]$. Comme de plus $v\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{G(v)}}$ est continue sur $]y_0,y_1[$, la fonction $y\mapsto t_0+\displaystyle\int_{y_0}^{y}\frac{1}{\sqrt{G(v)}}\,\mathrm{d}v$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]y_0,y_1[$ et sa dérivée ne s'annule pas. Sa fonction réciproque $t\mapsto y(t)$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]t_0,t_1[$ et par dérivation de l'égalité $t-t_0=\displaystyle\int_{y_0}^{y(t)}\frac{1}{\sqrt{G(v)}}\,\mathrm{d}v$, on obtient : $1=\dfrac{1}{\sqrt{G\big(y(t)\big)}}\,y'(t)$ d'où $y'^2(t)=G\big(y(t)\big)$.

$v\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{G(v)}}$ est en fait, comme F, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]y_0,y_1[$, donc $t\mapsto y(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]t_0,t_1[$. Comme $y(t_0)=y_0$, y est solution de classe $\mathcal{C}^2$ de (2), donc de (1), ainsi qu'il est admis dans l'énoncé. Par unicité, la fonction y ainsi définie sur $[t_0,t_1]$ est la solution de (1) sur cet intervalle.

On a obtenu : $\forall t\in\,]t_0,t_1[$, $y'(t)=\sqrt{G\big(y(t)\big)}>0$, donc

$$\boxed{\text{La solution } y \text{ de (1) sur } \mathbb{R} \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [t_0,t_1].}$$

c. Soit s la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $s(t)=y(2t_1-t)$.

Pour tout t de $\mathbb{R}$, $s'(t)=-y'(2t_1-t)$ et $s''(t)=y''(2t_1-t)=f\big(y(2t_1-t)\big)=f\big(s(t)\big)$

De plus, $s(t_1) = y(t_1) = y_1$ et $s'(t_1) = -y'(t_1) = 0$ puisque $y'^2(t_1) = G\big(y(t_1)\big) = G(y_1) = 0$.
s vérifie (1) avec les mêmes conditions initiales que y en t_1, donc par unicité $s = y$.
L'application $t \mapsto 2t_1 - t$ est décroissante et transforme le segment $[t_0, t_1]$ en $[t_1, 2t_1 - t_0]$, donc, puisque y est strictement croissante sur l'intervalle $[t_0, t_1]$, elle est strictement décroissante sur $[t_1, 2t_1 - t_0]$.

$$\boxed{\text{La solution } y \text{ de (1) sur } \mathbb{R} \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle } [t_1, 2t_1 - t_0].}$$

d. Soit z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(2t_1 - 2t_0 + t)$.
Pour tout t de $\mathbb{R}$, $z''(t) = y''(2t_1 - 2t_0 + t) = f\big(y(2t_1 - t_0 + t)\big) = f\big(z(t)\big)$
On déduit du **c.** que $z(t_0) = y(2t_1 - t_0) = y(t_0)$,
et $z'(t_0) = y'(2t_1 - t_0) = -y'(t_0) = 0$.
Par unicité de solution de (1), il en résulte que $z = y$, donc pour tout t de $\mathbb{R}$, $y(2t_1 - 2t_0 + t) = y(t)$.

$$\boxed{y \text{ est périodique de période } 2\int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{\sqrt{G(v)}}\,\mathrm{d}v.}$$

9. Nous sommes dans les conditions d'application du **8.** puisque $G(y) = -2\omega^2 \displaystyle\int_{y_0}^{y} \sin u \,\mathrm{d}u = 2\omega^2(\cos y - \cos y_0)$ donc $G(y_0) = 0$, $G'(y_0) = -2\omega^2 \sin y_0 \neq 0$, et en posant $y_1 = -y_0 \in\,]0, \pi[$, on a : $G(y_1) = 0$, $G'(y_1) = -G'(y_0) \neq 0$, et enfin pour tout y de $]y_0, y_1[$, $G(y) = 2\omega^2(\cos y - \cos y_0) > 0$.
La solution y du problème (1) est alors une fonction périodique, de période

$$P = 2\int_{y_0}^{-y_0} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{2\omega^2(\cos v - \cos y_0)}} = \frac{2}{\omega}\int_{y_0}^{-y_0} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\cos v - \cos y_0}}.$$

$$\boxed{P = \frac{2}{\omega}\, H(-y_0).}$$

En appliquant le résultat du **2.** (licite puisque $\cos(-y_0) = \cos y_0$), on obtient

$$\boxed{\lim_{y_0 \to 0} P = \frac{2\pi}{\omega}.}$$

10. Nous sommes dans les conditions d'application du **8.** puisque $G(y) = -2\displaystyle\int_{y_0}^{y} \lambda\, u^3 \,\mathrm{d}u = -\frac{\lambda}{2}\left(y^4 - y_0^4\right)$ donc $G(y_0) = 0$, $G'(y_0) = -2\lambda y_0^3 \neq 0$, et en posant encore $y_1 = -y_0 > 0$, on a : $G(y_1) = 0$, $G'(y_1) = -G'(y_0) \neq 0$, et enfin pour tout y de $]y_0, y_1[$, $|y| < |y_0|$ donc $y^4 < y_0^4$ d'où $G(y) > 0$.
La solution y du problème (1) est alors une fonction périodique, de période

$$P = 2\int_{y_0}^{-y_0} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{\dfrac{-\lambda}{2}\left(v^4 - y_0^4\right)}} \underset{(\text{parité})}{=} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}\int_{0}^{-y_0} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{y_0^4 - v^4}} \underset{(u = -\frac{v}{y_0})}{=} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\lambda}}\int_{0}^{1} \frac{-y_0\,\mathrm{d}u}{\sqrt{y_0^4 - y_0^4 u^4}}$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{(-y_0)\sqrt{\lambda}}\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^4}}$$

$$\boxed{P = \frac{4\sqrt{2}}{(-y_0)\sqrt{\lambda}}\, K(4).}$$