K27B

✻ Banque filière PT ✻

Epreuve de Mathématiques A

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Dans tout le problème, on se place dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ orienté. On considère une courbe plane paramétrée $t \longmapsto c(t)$, $t \in I$ (I intervalle de $\mathbb{R}$), de classe C^1, régulière ($c'(t) \neq \vec{0}$ en tout point de la courbe). On note $\vec{\tau}(t)$ le vecteur tangent unitaire de c au point de paramètre t et $\vec{n}(t)$ le vecteur obtenu après rotation d'angle $\pi/2$ du vecteur $\vec{\tau}(t)$.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. On note $B(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r associée à la norme euclidienne. On note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire usuel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan. Enfin, si A est un point du plan et si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, on note $B = A + \vec{u}$ l'unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$; autrement dit, B est l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$.

PARTIE I
Courbes équidistantes

On fixe un réel ε et l'on pose, pour tout $t \in I$,

$$c_\varepsilon(t) = c(t) + \varepsilon\, \vec{n}(t).$$

La courbe c_ε est appelée courbe équidistante à la courbe c.

1. On suppose que c est une parabole d'équation cartésienne $y = x^2$.
   (a) Donner une représentation paramétrique de c de la forme $(x(t), y(t))$, de sorte que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$.
   (b) Calculer $c_{1/2}$ et c_1.
   (c) Calculer la développée $\tilde{c}$ de c.

(d) Dessiner les quatre courbes c, $\tilde{c}$, $c_{1/2}$ et c_1 sur le même graphique. On étudiera en particulier les branches infinies et les tangentes aux points singuliers des différentes courbes.

2. On suppose que c est de classe C^2, paramétrée par son abscisse curviligne s et de longueur $\lambda(c)$ finie. On note $\gamma(s)$ la courbure de c au point d'abscisse s.
   (a) Rappeler dans ce cas le lien entre $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ et γ.
   (b) Montrer qu'il existe une fonction κ (que l'on déterminera) telle que
   $$\frac{d\overrightarrow{Oc_\varepsilon}}{ds} = \big(1 - \varepsilon\,\kappa(s)\big)\,\vec{\tau}(s).$$
   (c) On pose $f(\varepsilon) = \lambda(c_\varepsilon)$.
   Donner une expression de $f(\varepsilon)$ en fonction de $\gamma(s)$.
   (d) On suppose que la courbure γ est bornée. Montrer que f est dérivable au voisinage de 0 et que
   $$f'(0) = -\int_0^{\lambda(c)} \gamma(s)ds.$$

PARTIE II
Boule centrée sur une courbe

On suppose ici $I = [a, b]$ avec $a < b$. On considère un réel $\varepsilon > 0$ fixé. On se fixe $t \in [a, b]$ et p un point de la boule $B\big(c(t), \varepsilon\big)$.

1. On considère la fonction $f\ :\ u \longmapsto \|c(u) - p\|^2$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et calculer $f'(u)$.
2. Montrer que f est minorée et atteint son minimum en au moins un point $t_0 \in [a, b]$.
3. On suppose dans cette question que $t_0 \neq a$ et $t_0 \neq b$.
   (a) Que peut-on dire de $f'(t_0)$?
   (b) Montrer que $c(t_0) - p$ est orthogonal à $\vec{\tau}(t_0)$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel r tel que
   $$p = c(t_0) + r\,\vec{n}(t_0)$$
   avec $|r| < \varepsilon$.
4. Vérifier rapidement que le résultat précédent reste encore vrai si $t_0 = a$ et $f'(a) = 0$ ou bien si $t_0 = b$ et $f'(b) = 0$.
5. On suppose dans cette question que $t_0 = a$ et $f'(a) \neq 0$.
   (a) Que peut-on dire de $f'(a)$?
   (b) Montrer que l'on a nécessairement $p \neq c(a)$.
   (c) On pose $\vec{w}_a = \dfrac{\overrightarrow{c(a)p}}{\left\|\overrightarrow{c(a)p}\right\|}\cdot$ Montrer que $\vec{w}_a \cdot \vec{\tau}(a) < 0$.
   (d) Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $\vec{u}$ et un réel r tels que
   $$\vec{u}\cdot\vec{\tau}(a) < 0 \qquad 0 < r < \varepsilon \qquad p = c(a) + r\,\vec{u}.$$
6. On suppose dans cette question que $t_0 = b$ et $f'(b) \neq 0$.
   Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $\vec{u}$ et un réel r tels que
   $$\vec{u}\cdot\vec{\tau}(b) > 0 \qquad 0 < r < \varepsilon \qquad p = c(b) + r\,\vec{u}.$$

PARTIE III
Voisinage tubulaire d'une courbe

On suppose toujours $I = [a, b]$. On se fixe un réel $\varepsilon > 0$.

On dit que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de points du plan
vérifie l'hypothèse $(H1)$ si,
pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un réel $t_k \in [a, b]$ et un réel $r_k \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tels que

$$p_k = c(t_k) + r_k\,\vec{n}(t_k),$$

vérifie l'hypothèse $(H2)$ si
pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un réel $r_k \in]0, \varepsilon[$ et un vecteur unitaire $\vec{u}_k$ tels que

$$\vec{u}_k \cdot \vec{\tau}(a) < 0 \qquad p_k = c(a) + r_k\,\vec{u}_k,$$

vérifie l'hypothèse $(H3)$ si
pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un réel $r_k \in]0, \varepsilon[$ et un vecteur unitaire $\vec{u}_k$ tels que

$$\vec{u}_k \cdot \vec{\tau}(b) > 0 \qquad p_k = c(b) + r_k\,\vec{u}_k.$$

On définit le voisinage tubulaire $U_\varepsilon(c)$ de rayon ε de la courbe c par la relation :

$$U_\varepsilon(c) = \bigcup_{t\in[a,b]} B\big(c(t), \varepsilon\big).$$

On dit qu'un point p appartient au bord de $U_\varepsilon(c)$ s'il vérifie les deux conditions :
- $p \notin U_\varepsilon(c)$,
- il existe une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de points de $U_\varepsilon(c)$ qui converge vers p.

1. (a) Si la courbe c est le cercle de centre O et de rayon R, décrire l'ensemble $U_\varepsilon(c)$ et son bord. (Il pourra être utile d'étudier plusieurs cas selon la position de ε par rapport à R)

   (b) Même question si c est le segment $[0, 1]$ de l'axe des abscisses.
2. Montrer que $x \in U_\varepsilon(c) \iff \exists t \in [a, b],\ \|x - c(t)\| < \varepsilon$.
3. Dans toute la suite de cette partie, on considère un point p du bord de $U_\varepsilon(c)$ et une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de points de $U_\varepsilon(c)$ qui converge vers p.
   En utilisant les résultats de la partie II, montrer que l'on peut extraire de la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite $(p_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifie l'une des conditions $(H1)$, $(H2)$ ou $(H3)$.
   La suite $(p_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
4. On suppose dans cette question que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse $(H1)$.

   (a) On admet le résultat suivant : *Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée, alors il existe une suite extraite qui converge.*
   Montrer qu'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que les deux suites $(t_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(r_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ convergent.

   (b) Montrer qu'il existe un réel $t \in [a, b]$ et un réel $r \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tels que

   $$p = c(t) + r\,\vec{n}(t).$$

   (c) En raisonnant par l'absurde, montrer qu'en fait $|r| = \varepsilon$.
5. On suppose dans cette question que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse $(H2)$. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{\tau}(a) \le 0$ et $p = c(a) + \varepsilon\,\vec{u}$.

6. On suppose dans cette question que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse $(H3)$. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que $\vec{u}\cdot\vec{\tau}(b) \geq 0$ et $p = c(b) + \varepsilon\,\vec{u}$.
7. Montrer avec soin que le bord de $U_\varepsilon(r)$ est inclus dans la réunion
   - des deux courbes équidistantes c_ε et $c_{-\varepsilon}$, et
   - des deux demi-cercles de rayon ε et de centres $c(a)$ et $c(b)$, opposés respectivement à $\vec{\tau}(a)$ et $-\vec{\tau}(b)$.
8. Dessiner une courbe pour laquelle l'inclusion précédente est stricte.

PARTIE IV
Condition nécessaire d'usinabilité

On se fixe toujours un réel $\varepsilon > 0$ et on considère maintenant une courbe paramétrée $s \mapsto \mathcal{C}(s)$, paramétrée par son abscisse curviligne $s \in [0, L]$, de classe $\mathcal{C}^2$, régulière, "fermée, sans point multiple", c'est à dire

- $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}(L)$,
- Pour tous $s_1, s_2 \in]0, L[, \quad s_1 \neq s_2 \Longrightarrow \mathcal{C}(s_1) \neq \mathcal{C}(s_2)$.

On suppose que le paramétrage est choisi de sorte que la normale à la courbe soit dirigée vers l'extérieur.

1. Dessiner une telle courbe en précisant le sens du paramétrage.
2. Soit m_0 un point d'abscisse $s_0 \in]0, L[$ tel que $\mathcal{C}''(s_0) \neq \vec{0}$, $\vec{\tau}_0$ le vecteur tangent en ce point, $\vec{n}_0$ le vecteur normal en ce point et R_0 le rayon de courbure de la courbe en m_0. Soit m le point de la courbe d'abscisse curviligne $s_0 + h$. On note $(\xi(h), \eta(h))$ les coordonnées du point m dans le repère $(m_0, \vec{\tau}_0, \vec{n}_0)$.
   (a) Ecrire le développement limité de $h \mapsto \mathcal{C}(s_0 + h)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.
   (b) En déduire le développement limité de ξ et η à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   (c) Soit $a > 0$ et $\mathcal{C}_a$ le cercle passant par m_0, de rayon a et de centre $\Omega = m_0 + a\,\vec{n}_0$. Ecrire l'équation cartésienne de ce cercle dans le repère $(m_0, \vec{\tau}_0, \vec{n}_0)$ sous la forme
   $$g_a(x, y) = 0.$$
   (d) On pose $\varphi(h) = g_a\big(\xi(h), \eta(h)\big)$. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de φ au voisinage de 0.
   (e) Montrer que si $a \neq R_0$, alors tous les points de $\mathcal{C}_a$ restent du même côté de la courbe au voisinage de m_0.
3. Montrer qu'une condition nécessaire pour que la courbe $\mathcal{C}$ soit le bord d'un voisinage tubulaire $U_\varepsilon(c)$ est que
   $$\forall s \in I,\ \gamma(s) \geq -\frac{1}{\varepsilon},$$
   où $\gamma(s)$ désigne la courbure de la courbe $\mathcal{C}$ au point d'absisse curviligne s.
4. Dessiner une courbe $\mathcal{C}$ pour laquelle cette condition est vérifiée et qui n'est pas le bord d'un voisinage tubulaire de rayon ε.

Ce problème est issu du problème de l'usinage d'une plaque (de bois ou de métal) avec une fraise de rayon ε. La partie III étudie la forme usinée si le centre de la fraise se déplace le long de la courbe c. La partie IV étudie le problème inverse : étant donnée une forme à usiner, l'usinage est-il possible à l'aide d'une fraise de rayon ε ?