Banque PT 2005 — épreuve A (4 h)

Partie I — Courbes équidistantes

Question I.1

I.1.a La parabole se paramètre naturellement sous la forme $x(t) = t$ et $y(t) = t^2$. Alors le vecteur tangent est $\tau(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}})$ donc le vecteur normal $\vec{n}(-\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}})$.

Finalement, la courbe c_ε est paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t - \dfrac{2\varepsilon t}{\sqrt{1+4t^2}} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1+4t^2}} \end{cases}$

I.1.b En particulier : $c_{1/2}$ est paramétrée par $\begin{cases} x(t) = t - \dfrac{t}{\sqrt{1+4t^2}} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{1}{2\sqrt{1+4t^2}} \end{cases}$ et c_1 par $\begin{cases} x(t) = t - \dfrac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \end{cases}$

I.1.c On a écrit, pour la courbe c, $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1+4t^2}$. Or $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ qui a pour composantes $(-\frac{4t}{(1+4t^2)^2}, \frac{2}{(1+4t^2)^2})$, donc le rayon de courbure est finalement $R = \frac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}$.

Or $\tilde{c}(t) = c(t) + R\vec{n}(t)$, donc la développée $\tilde{c}$ est paramétrée par : $\begin{cases} x(t) = -4t^3 \\ y(t) = \dfrac{1}{2} + 3t^2 \end{cases}$

I.1.d On ne parle même pas de l'étude de c !
Chaque courbe vérifie $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, donc admet (Oy) comme axe de symétrie, et peut être étudiée sur $[0, +\infty[$.
Étude de $\tilde{c}$: x décroît et y croît ; le point de paramètre $t = 0$ est un point de rebroussement de première espèce, à tangente verticale (le DL est déjà tout cuit !) ; y/x tend vers 0 quand $t \to +\infty$: il y a une branche asymptotique de direction (Ox).
Étude de $c_{1/2}$: On trouve $x'(t) = \frac{(1+4t^2)^{3/2} - 1}{(1+4t^2)^{3/2}}$, toujours positif, et $y'(t) = 2tx'(t)$, donc x et y croissent sur $[0, +\infty[$. Le point de paramètre $t = 0$ est $(0, 1/2)$, et les DL sont $x(t) = 2t^3 + o(t^4)$ et $y(t) = 1/2 + 3t^4 + o(t^4)$, de sorte qu'il y a une tangente horizontale d'allure banale. Quand $t \to +\infty$, $y/x \sim t \to +\infty$: il y a une branche asymptotique de direction (Oy).
Étude de c_1 : On trouve $x'(t) = \frac{(1+4t^2)^{3/2} - 2}{(1+4t^2)^{3/2}} = 1 - \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$, et $y'(t) = 2tx'(t)$.

x' et y' s'annulent ensemble (ce sera donc un point singulier) pour $t = t_0 = \frac{\sqrt{2^{2/3} - 1}}{2}$. x et y décroissent sur $[0, t_0]$ et croissent sur $[t_0, +\infty]$.
Le point de paramètre $t = 0$ est $(0, 1)$, il n'est pas singulier (c'est une simple tangente horizontale).
Le point singulier, de paramètre $t = t_0$, a pour coordonnées $(\frac{1}{2}t_0^{3/2}, \frac{3\,2^{2/3} - 1}{4})$. Le calcul des DL en t_0 de $x(t)$ et $y(t)$ est inhumain ! Les termes de degré 1 disparaissent, il restera des termes de degré 2 et 3, ce qui indique une tangente de rebroussement de première espèce. La direction de cette tangente s'obtient en étudiant y'/x' qui tend vers $2t_0$: c'est le coefficient directeur de cette tangente.
Quand $t \to +\infty$, $y/x \sim t \to +\infty$: il y a une branche asymptotique de direction (Oy).
La figure 1 page 2 montre toutes ces courbes : c est en gras, sa développée $\tilde{c}$ en gras tireté, les deux courbes équidistantes en trait fin (c'est $c_{1/2}$ qui est la plus simple des deux).
On aura noté au passage que les points singuliers des courbes équidistantes sont sur la développée... On en reparle bientôt.

Question I.2

I.2.a On sait que $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \gamma(s)\vec{n}$ et $\frac{d\vec{n}}{ds} = -\gamma(s)\vec{\tau}$.

I.2.b Alors $\frac{d\overrightarrow{Oc_\varepsilon}}{ds} = \vec{\tau} + \varepsilon\frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{\tau} - \varepsilon\gamma(s)\vec{\tau} = (1 - \varepsilon\gamma(s))\vec{\tau}$. Autrement dit $\kappa = \gamma$.

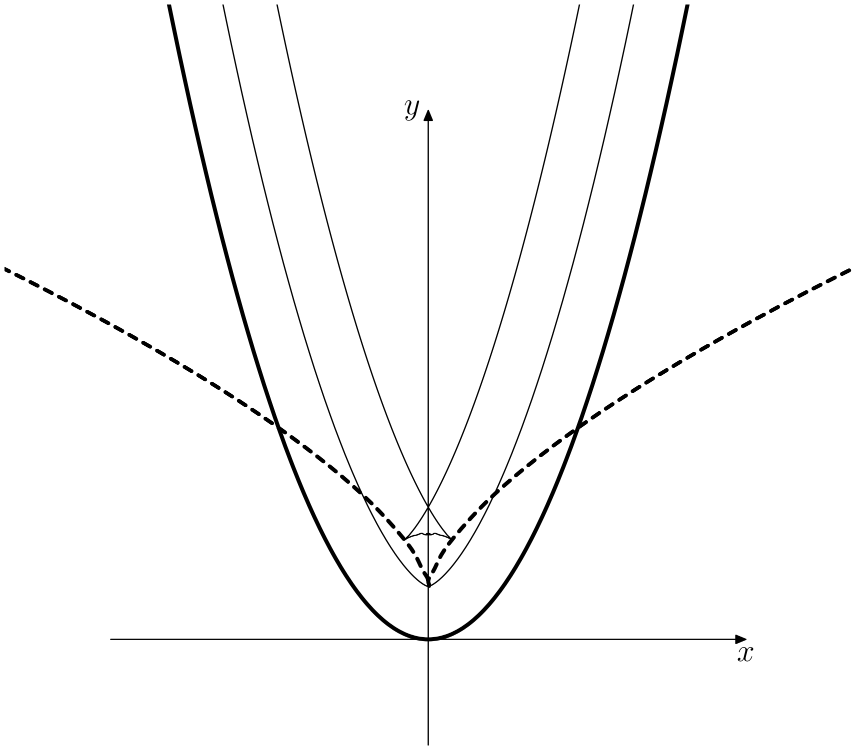

Figure 1 c, $\tilde{c}$, $c_{1/2}$ et c_1

I.2.c La norme de $\dfrac{d\overrightarrow{Oc_\varepsilon}}{ds}$ vaut donc $|1-\varepsilon\gamma(s)|$. Pour parcourir la courbe c en entier, s varie de 0 à $\lambda(c)$, la longueur de c. Alors, la longueur de c_ε vaut $f(\varepsilon) = \lambda(c_\varepsilon) = \displaystyle\int_0^{\lambda(c)} |1-\varepsilon\gamma(s)|\,ds$.

Revenons à la remarque de la fin du I.1.d : un point singulier de c_ε se produit quand $\dfrac{d\overrightarrow{Oc_\varepsilon}}{ds} = \vec{0}$, donc quand $\varepsilon\gamma = 1$ ou encore $\varepsilon = R$. Bref, un tel point singulier s'écrit $p + R\vec{n}$: il s'agit du centre de courbure de c, qui est bien sur la développée $\tilde{c}$ de c.

I.2.d On suppose γ bornée : $\forall s, |\gamma(s)| \leqslant G$. Alors, pour $|\varepsilon| < \dfrac{1}{G}$, on peut se dispenser de la valeur absolue car $1-\varepsilon\gamma(s)$ restera positif. Alors $f(\varepsilon) = \lambda(c) - \varepsilon \displaystyle\int_0^{\lambda(c)} \gamma(s)\,ds$ et l'intégrale ne dépendant plus de ε, on a bien $f'(0) = -\displaystyle\int_0^{\lambda(c)} \gamma(s)\,ds$.

Partie II — Boule centrée sur une courbe

Question II.1

Notons x_p et y_p les coordonnées de p : $f(u) = (x(u)-x_p)^2 + (y(u)-y_p)^2$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(u) = 2x'(u)(x(u)-x_p) + 2y'(u)(y(u)-y_p) = 2\overrightarrow{c'(u)}.\overrightarrow{pc(u)}$.

Question II.2

f est toujours positive, donc minorée, et continue sur le segment $[a,b]$, donc elle atteint son minimum en au moins un point $t_0 \in [a,b]$.

Question II.3

II.3.a Bien sûr, $f'(t_0) = 0$.

II.3.b Donc, d'après le calcul précédent, $\overrightarrow{c'(t_0)} \perp \overrightarrow{pc(t_0)}$. Mais $\overrightarrow{c'(t_0)}$ dirige la tangente au point de paramètre t_0, donc est colinéaire à $\vec{\tau}(t_0)$. Finalement $\overrightarrow{pc(t_0)} = c(t_0) - p$ est bien orthogonal à $\vec{\tau}(t_0)$.

II.3.c Un vecteur orthogonal à $\vec{\tau}(t_0)$ est colinéaire à $\vec{n}(t_0)$, donc il existe r tel que $p = c(t_0) + r\vec{n}(t_0)$. Alors $r^2 = \|c(t_0) - r\|^2 = f(t_0) \leqslant f(t)$ car f atteint son minimum en t_0. Or dire que $p \in B(c(t), \varepsilon)$, c'est exactement dire que $f(t) < \varepsilon^2$. Donc $r^2 < \varepsilon^2$ et $|r| < \varepsilon$.

Question II.4

Les 3.b et 3.c découlent directement de 3.a : si on suppose $t_0 = a$ et $f'(a) = 0$, on obtient donc les mêmes résultats, ou encore si $t_0 = b$ et $f'(b) = 0$.

Question II.5

II.5.a On suppose cette fois que f atteint son minimum en a et que $f'(a) \neq 0$: c'est donc que $f'(a) > 0$.

II.5.b $f'(a) = 2\overrightarrow{c'(a)}.\overrightarrow{pc(a)} \neq 0$ donc $p \neq c(a)$.

II.5.c On a écrit $f'(a) = 2\overrightarrow{c'(a)}.\overrightarrow{pc(a)} = -2\|\overrightarrow{c(a)p}\|\,\overrightarrow{c'(a)}.\vec{w}_a$ et $f'(a) > 0$, donc $\overrightarrow{c'(a)}.\vec{w}_a < 0$. Or $\overrightarrow{c'(a)} = \|\overrightarrow{c'(a)}\|\,\vec{\tau}(a)$ et finalement $\vec{\tau}(a).\vec{w}_a < 0$.

II.5.d On choisit évidemment $\vec{u} = \vec{w}_a$: on a bien $\vec{u}.\vec{\tau}(a) < 0$, et $p = c(a) + r\vec{u}$ où $r = \|c(a) - p\|$. $r > 0$ car $p \neq c(a)$. Mais f atteint son minimum en a donc $r = \sqrt{f(a)} \leqslant \sqrt{f(t)} < \varepsilon$ (puisque $p \in B(c(t), \varepsilon)$. On a bien vérifié toutes les conditions requises.

Question II.6

On fait (rapidement) de même : cette fois, $f'(b) < 0$. Or $f'(b) = 2\overrightarrow{c'(b)}.\overrightarrow{pc(b)} \neq 0$ donc $p \neq c(b)$. On pose alors $\vec{u} = \vec{w}_b = \dfrac{\overrightarrow{c(b)p}}{\|\overrightarrow{c(b)p}\|}$ (qui est unitaire).

On a de même $f'(b) = -2\|\overrightarrow{c(b)p}\|\;\|\overrightarrow{c'(b)}\|\,\vec{\tau}(b).\vec{w}_b < 0$ donc cette fois $\vec{u}.\vec{\tau}(b) > 0$.

On a toujours $p = c(b) + r\vec{u}$ avec $r = \|c(b) - p\|$. $r > 0$ car $p \neq c(b)$. Et comme f atteint son minimum en b, on vérifie ici encore que $r < \varepsilon$. Ça marche !

Partie III — Voisinage tubulaire d'une courbe

Question III.1

III.1.a Si $0 < \varepsilon < R$, le voisinage tubulaire $U_\varepsilon(c)$ est une couronne comprise entre les deux cercles de centre O et de rayons $R + \varepsilon$ et $R - \varepsilon$, dont la réunion constitue son bord.

Si $\varepsilon = R$, le voisinage tubulaire $U_\varepsilon(c)$ est le disque ouvert de centre O et de rayon $2R$ privé de l'origine ; son bord est la réunion de l'origine et du cercle de centre O et de rayon $2R$.

Si $\varepsilon > R$, le voisinage tubulaire $U_\varepsilon(c)$ est le disque ouvert de centre O et de rayon $R + \varepsilon$, son bord étant le cercle de rayon $R + \varepsilon$.

III.1.b Un dessin vaut mieux qu'un long discours…

La zone grisée est le voisinage tubulaire demandé ; son bord est en trait tireté.

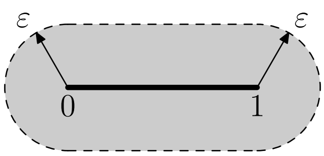

Figure 2 U_ε

Question III.2

$$x \in U_\varepsilon(c) \iff x \in \bigcup_{t \in [a,b]} B(c(t), \varepsilon) \iff \exists t \in [a,b], x \in B(c(t), \varepsilon) \iff \exists t \in [a,b], \|x - c(t)\| < \varepsilon.$$

Question III.3

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k est dans $U_\varepsilon(c)$, donc on peut lui associer, d'après la question 2, un réel $t \in [a,b]$ tel que $\|p_k - c(t)\| < \varepsilon$. D'après la partie II, on peut trouver $t_k \in [a,b]$ qui réalise le minimum de $f : u \mapsto \|c(u) - p_k\|^2$ et on se retrouve dans l'un des trois cas suivants :

- ▷ ou bien il existe $r_k \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ tel que $p_k = c(t_k) + r_k\vec{n}(t_k)$;
- ▷ ou bien $t_k = a$ et il existe $r_k \in]0, \varepsilon[$ et $\vec{u}_k$ unitaire tel que $\vec{u}_k.\vec{\tau}(a) < 0$ et $p_k = c(a) + r_k\vec{u}_k$;
- ▷ ou bien $t_k = b$ et il existe $r_k \in]0, \varepsilon[$ et $\vec{u}_k$ unitaire tel que $\vec{u}_k.\vec{\tau}(b) > 0$ et $p_k = c(b) + r_k\vec{u}_k$.

Il y a une infinité d'indices k à étudier, qui peuvent se ranger dans l'une ou l'autre de ces trois catégories : il y a donc au moins une catégorie parmi les trois pour laquelle il y a une infinité d'indices correspondants. Autrement dit, on peut extraire une suite infinie qui vérifie l'hypothèse (H_1), ou l'hypothèse (H_2), ou l'hypothèse (H_3). (Il est même possibles qu'on puisse extraire trois suites infinies : une vérifiant chacune des hypothèses.)

Bien sûr, comme la suite (p_k) converge de limite p, il en est de même pour la suite extraite considérée.

Question III.4
On choisit une suite (p_k) convergente de limite p vérifiant (H_1).

III.4.a Rappelons la définition d'une suite extraite d'une suite (u_n) : c'est une suite $(u_{\varphi(n)})$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
Ainsi, comme la suite (t_n) reste dans $[a,b]$ donc est bornée, il existe φ_1 strictement croissante telle que la suite $(t_{\varphi_1(n)})$ soit convergente. Notons $\rho_n = r_{\varphi_1(n)})$. La suite (ρ_n) est également bornée puisque ses termes sont dans $]-\varepsilon,\varepsilon[$: il existe donc φ_2 strictement croissante telle que $(\rho_{\varphi_2(n)})$ est convergente. Or $\rho_{\varphi_2(n)}) = r_{\varphi_1(\varphi_2(n))}$, posons donc $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$: φ est également strictement croissante et $(r_{\varphi(n)})$ converge. Mais $(t_{\varphi(n)})$ est extraite de la suite convergente $(t_{\varphi_1(n)})$ donc elle converge elle aussi : on a bien répondu aux conditions requises.

III.4.b Soit $t = \lim t_{\varphi(n)} \in [a,b]$ et $r = \lim r_{\varphi(n)} \in [-\varepsilon,\varepsilon]$. On sait que $p = \lim p_n$ donc $p = \lim p_{\varphi(n)}$.
Or, pour tout n, on a $p_{\varphi(n)} = c(t_{\varphi(n)}) + r_{\varphi(n)}\vec{n}(t_{\varphi(n)})$, et $t \mapsto \vec{n}(t)$ est continue car la courbe est $\mathcal{C}^1$. Donc, passant à la limite, on a bien $p = c(t) + r\vec{n}(t)$.

III.4.c Si on avait $|r| \neq \varepsilon$, on aurait $\|p - c(t)\| < \varepsilon$ donc $p \in B(c(t),\varepsilon) \subset U_\varepsilon(c)$ ce qui contredit la définition du bord auquel doit appartenir p.
Donc $r = \pm\varepsilon$.

Question III.5
On fait de même... Observons que les vecteurs $\vec{u}_k$ étant unitaires, leurs coordonnées sont les termes généraux de suites de $[-1,1]$ donc bornées. C'est ce qui permet de choisir φ pour que $(r_{\varphi(n)})$ converge, de limite $r \in [0,\varepsilon]$, et $(\vec{u}_{\varphi(n)})$ converge, de limite $\vec{u}$ unitaire.
Comme pour tout k, $\vec{u}_k.\vec{\tau}(a) < 0$, passant à la limite, on aura $\vec{u}.\vec{\tau}(a) \leqslant 0$. On aura $p = c(a) + r\vec{u}$, et parce que p est sur le bord mais pas sur $U_\varepsilon(c)$, on interdira $|r| < \varepsilon$, donc finalement $r = \varepsilon$ et $p = c(a) + \varepsilon\vec{u}$.

Question III.6
C'est quasiment la même chose !

Question III.7
On vient de considérer un point quelconque p du bord dans les trois cas possibles : si (H_1) est vérifiée, 4.c a montré que $p = c(t) \pm \varepsilon\vec{n}(t)$ donc que p est sur la courbe équidistante $c_{\pm\varepsilon}$; si (H_2) est vérifiée, 5 a montré que p est sur le cercle de centre $c(a)$ et de rayon ε, et plus précisément sur le demi-cercle opposé à $\vec{\tau}(a)$; si enfin (H_3) est vérifiée, 6 montre que p est sur le cercle de centre $c(b)$ et de rayon ε, et plus précisément sur le demi-cercle opposé à $-\vec{\tau}(b)$. C'est ce qui est demandé.

Question III.8
Dans le cas où c est le cercle de rayon 1 et où $\varepsilon = 1/2$, on a trouvé que le bord de $U_{1/2}(c)$ est constitué seulement des deux cercles $c_{1/2}$ (cercle de rayon 3/2) et $c_{-1/2}$ (cercle de rayon 1/2) : on ne trouve pas les deux demi-cercles supplémentaires, l'inclusion précédente est bien stricte.

Partie IV — Condition nécessaire d'usinabilité

Observons que dire que la normale à la courbe est dirigée vers l'extérieur, c'est dire que sa courbure (ou son rayon de courbure) est toujours négative.

Question IV.1
On peut par exemple prendre un cercle mais paramétré dans le sens des aiguilles d'une montre (donc le sens contraire du sens trigonométrique habituel) pour que $\vec{n}$ dirige vers l'extérieur.

Question IV.2
Écrivons les dérivées successives de C en s_0.
$\overrightarrow{C'}(s_0) = \vec{\tau}_0$, $\overrightarrow{C''}(s_0) = \dfrac{\vec{n}_0}{R_0}$ donc $\xi(h) = h + o(h^2)$ et $\eta(h) = \dfrac{h^2}{2R_0} + o(h^2)$.
Dans le repère choisi, $\Omega(0,a)$ donc le cercle a pour équation $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ ou encore $g_a(x,y) = 0$ où $g_a(x,y) = x^2 + y^2 - 2ay$.
Alors $\varphi(h) = g_a(\xi(h),\eta(h)) = h^2 - a\dfrac{h^2}{R_0} + o(h^2) = (1 - \dfrac{a}{R_0})h^2 + o(h^2)$.
Ainsi, si $a \neq R_0$, le signe de $\varphi(h)$ reste constant non nul au voisinage de $h = 0$, ce qui signifie bien que les points du cercle restent tous du même côté de la courbe au voisinage de m_0. Plus précisément : si $a > R_0$, les points de la courbe sont, au voisinage de m_0, à l'intérieur du cercle C_a ; si $a < R_0$, les points de la courbe sont à l'extérieur du cercle.

Question IV.3
En fait, l'énoncé envisage probablement le cas où C est le bord d'un trou découpé dans une plaque, et doit donc être une partie du bord d'un voisinage tubulaire $U_\varepsilon(c)$, où c est une courbe qui est donc toute entière à l'intérieur du "trou".
Dans ce cas, il faut que le cercle de rayon ε vérifie l'inégalité $\varepsilon \leqslant -R(s)$ ou encore $\gamma(s) \geqslant -\dfrac{1}{\varepsilon}$ pour tout $s \in [0, L]$.

Question IV.4
On trace ci-dessous la courbe d'équations $\begin{cases} x = 4\sin t - \sin 3t \\ y = \dfrac{4\cos t - \cos 3t}{5} \end{cases}$ (c'est une néphroïde raccourcie un peu déformée). La courbure est presque toujours positive, sauf au voisinage des points A et A' d'intersection avec l'axe des y.
Le minimum (négatif) de la courbure est atteint au point $A(t = 0)$ $((x, y) = (0, 3/5))$. En ce point, $x = t + o(t^2)$ et $y = \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, donc les premiers vecteurs dérivés sont $\vec{M}'(1, 0)$ et $\vec{M}''(0, 1)$. On en déduit que la courbure en ce point vaut -1.
Si donc $\varepsilon = 1$, on a toujours $\gamma(s) \geqslant -\dfrac{1}{\varepsilon}$. Pourtant une fraise de rayon 1 va "mordre" sur la partie gauche de la plaque puisque $\|\overrightarrow{A'A}\| = \dfrac{6}{5} < 2\varepsilon = 2$. On ne peut évidemment pas percer une telle plaque avec une fraise de diamètre 2, plus grand que la "largeur minimale" du trou !