❋ Banque filière PT ❋

Epreuve de Mathématiques II-A

Durée 4 h

L'usage de calculatrices est interdit

Exercice I

On note $\mathcal{B}_0 = \{\overrightarrow{\imath_0}, \overrightarrow{\jmath_0}\}$ la base orthonormée canonique de $\mathbb{R}^2$.

On considère les deux formes quadratiques définies dans la base $\mathcal{B}_0$ par les relations :

$$q_1(\overrightarrow{U}) = 5\,x_0^2 - 6\,x_0\,y_0 + 5\,y_0^2,$$

$$q_2(\overrightarrow{U}) = 2\sqrt{3}\,x_0\,y_0 - 2\,y_0^2,$$

où l'on a posé $\overrightarrow{U} = x_0\,\overrightarrow{\imath_0} + y_0\,\overrightarrow{\jmath_0}$.

I.1 Quelles sont respectivement dans la base $\mathcal{B}_0$ les matrices A_1 et A_2 des formes quadratiques q_1 et q_2 ?

I.2 Calculer $A_1\,A_2 - A_2\,A_1$.

On désigne respectivement par u_1 et u_2 les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis dans la base $\mathcal{B}_0$ par les matrices A_1 et A_2.

Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les matrices de u_1 et u_2 sont toutes deux diagonales ?

I.3 On note $\mathcal{R}_0$ le repère $(O;\mathcal{B}_0)$ de $\mathbb{R}^2$ considéré comme plan euclidien orienté.

Soit a un réel strictement positif.

Soient C_1 et C_2 les coniques dont les équations dans le repère $\mathcal{R}_0$ sont respectivement $q_1(\overrightarrow{U}) = 8\,a^2$ et $q_2(\overrightarrow{U}) = a^2$.

Déterminer la nature, les éléments de symétrie et les asymptotes éventuelles des coniques C_1 et C_2.

Existe-t-il une rotation de $\mathbb{R}^2$ qui amène simultanément les axes de $\mathcal{R}_0$ sur les axes de symétrie de C_1 et C_2 ?

I.4 Déterminer l'unique angle θ de $[0, \pi/2]$ tel que la rotation de centre O et d'angle θ transforme le repère $\mathcal{R}_0$ en un repère $(O; \{\overrightarrow{\imath_1}, \overrightarrow{\jmath_1}\})$ noté $\mathcal{R}_1$ dont les axes soient les axes de symétrie de C_1.

Quelles sont les équations de C_1 et de C_2 dans ce nouveau repère $\mathcal{R}_1$?

I.5 On note $\overrightarrow{\imath_2} = 2\,\overrightarrow{\imath_1}$, $\overrightarrow{\jmath_2} = \overrightarrow{\jmath_1}$ puis $\mathcal{R}_2$ le repère $(O; \{\overrightarrow{\imath_2}, \overrightarrow{\jmath_2}\})$.

Quelles sont les équations de C_1 et de C_2 dans ce repère $\mathcal{R}_2$?

Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les matrices des formes quadratiques q_1 et q_2 soient toutes deux diagonales ?

Exercice II

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

II.A.1 Quel est le domaine de définition de la fonction f de la variable réelle définie par

$$x \mapsto \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x\,t} \ln t \, dt \ ?$$

II.A.2 Quel est le domaine de définition de la fonction g de la variable réelle définie par

$$x \mapsto \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x\,t}\, t \ln t \, dt \ ?$$

II.A.3 Etudier la dérivabilité de la fonction f sur son domaine de définition (on énoncera avec précision le théorème utilisé).

II.A.4 Calculer $x\, f'(x) + f(x) + \dfrac{1}{x}$ sur son domaine de définition.

En déduire la valeur de $f(x)$ en fonction de $f(1)$.

II.A.5 Pour A supérieur ou égal à 1, étudier le signe de

$$\left| \int_A^{\infty} \mathrm{e}^{-t} \ln t \, dt \right| - (A+1)\, \mathrm{e}^{-A}.$$

Pour t strictement positif et inférieur ou égal à 1, donner le signe de $\dfrac{2}{\sqrt{t}} + \ln t$.

Pour ϵ strictement positif et inférieur ou égal à 1, a-t-on l'inégalité

$$\left| \int_0^{\epsilon} \mathrm{e}^{-t} \ln t \, dt \right| \le 4\sqrt{\epsilon} \ ?$$

Partie B

On désigne par a, b, α et β quatre constantes réelles vérifiant $a < b$ et $\alpha < \beta$.

Soit φ une fonction définie sur $[a, b]$, à valeurs réelles, continue et croissante au sens large.

II.B.1 Pour n entier strictement positif, on pose $h = \dfrac{b-a}{n}$.

Démontrer les inégalités :

$$h \sum_{k=0}^{k=n-1} \varphi(a + k\,h) \leq \int_a^b \varphi(t)\,dt \leq h \sum_{k=1}^{k=n} \varphi(a + k\,h).$$

II.B.2 Quelles inégalités auraient pu être obtenues si φ avait été décroissante au sens large ?

II.B.3 En déduire en fonction de a, b, n, $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ une majoration de la valeur absolue de la différence entre l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt$ et chacune des deux sommes finies intervenant dans les inégalités de la question II.B.1.

II.B.4 On suppose désormais que φ admet une dérivée seconde sur $[a, b]$ et qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que, pour tout t de $[a, b]$, on a

$$\alpha \leq \varphi''(t) \leq \beta.$$

Etudier le signe de la dérivée seconde de la fonction θ définie sur $[a, b]$ par la relation

$$\theta(t) = \varphi(t) + \frac{\alpha}{2}(t-a)(b-t).$$

II.B.5 En déduire les inégalités

$$\alpha\,\frac{(b-a)^3}{12} \leq \frac{b-a}{2}\Big(\varphi(a) + \varphi(b)\Big) - \int_a^b \varphi(t)\,dt \leq \beta\,\frac{(b-a)^3}{12}.$$

II.B.6 Avec les notations précédentes, on pose

$$S = \frac{h}{2}\left[\varphi(a) + \varphi(b) + 2\sum_{k=1}^{k=n-1} \varphi(a + k\,h)\right].$$

Donner en fonction éventuellement de a, b, n, α et β, une majoration de

$$\left| S - \int_a^b \varphi(t)\,dt \right|.$$

Exercice III

Soit p une constante réelle strictement positive.

III.1 Représenter la courbe $\mathcal{P}$ d'équation polaire

$$\rho(\theta) = \frac{p}{1+\cos\theta} \ ,$$

après en avoir étudié les éventuelles branches infinies.

III.2 Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$: il pourra être commode d'utiliser l'angle $\dfrac{\theta}{2}$.

III.3 Pour θ décrivant l'intervalle $]-\pi, \pi[$, on associe au point $P(\theta)$ de la courbe $\mathcal{P}$ le point $Q(\theta)$ défini par la relation

$$\overrightarrow{OQ(\theta)} = p^2 \frac{\overrightarrow{OP(\theta)}}{||\overrightarrow{OP(\theta)}||^2}$$

et on note $\mathcal{L}$ la courbe décrite par le point $Q(\theta)$.

Représenter la courbe $\mathcal{L}$.

Comparer la direction de la tangente en $P(\theta)$ à $\mathcal{P}$ et la direction de la tangente en $Q(\theta)$ à $\mathcal{L}$.

III.4 Au point $Q(\theta)$ de $\mathcal{L}$ on associe le point $R(\theta)$ défini par la relation

$$\overrightarrow{OR(\theta)} = \left(1 - \frac{p}{||\overrightarrow{OQ(\theta)}||}\right) \overrightarrow{OQ(\theta)} .$$

Quelle est la nature de la courbe décrite par $R(\theta)$?

III.5 On désigne désormais par $\mathcal{L}$ la courbe fermée du plan paramétrée par θ obtenue en complétant la courbe $\mathcal{L}$, définie en III.3, par les deux relations $Q(-\pi) = Q(\pi) = O$.

Calculer l'aire de la surface de $\mathbb{R}^2$ intérieure à $\mathcal{L}$.

Déterminer le centre d'inertie de cette surface intérieure, supposée homogène.

III.6 A l'aide du repère canonique de $\mathbb{R}^2$ on définit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ par ses deux composantes

$$V_x = \left(1 - \mathrm{e}^{-x} \cos y\right) , \ V_y = \left(x - \mathrm{e}^{-x} \sin y\right) .$$

Ce champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?

Calculer la circulation de $\overrightarrow{V}$ sur la courbe $\mathcal{L}$ orientée dans le sens trigonométrique.