Banque PT – Math II-B

I. Préliminaires.

1. $\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$ d'où

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \quad 2\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2.}$$

2. a. Si $\langle x,y\rangle = 0$, l'inégalité à prouver est triviale.
Sinon, $x \neq 0_E$ et $\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle + \|y\|^2$ est un trinôme en λ qui ne prend que des valeurs ≥ 0 pour tout λ de $\mathbb{R}$, car c'est $\|\lambda x + y\|^2$. Donc son discriminant est ≤ 0. Dans les deux cas,

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2, \quad |\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.}$$

b. Dans le premier cas l'égalité a lieu si et seulement si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$.
Dans le second cas l'égalité a lieu si et seulement si le discriminant est nul, ce qui équivaut pour le trinôme à l'existence d'une racine double λ_0, qui vérifie donc : $\lambda_0 x + y = 0_E$.
Dans les deux cas :

$$\boxed{\text{L'égalité a lieu si et seulement si la famille } (x,y) \text{ est liée.}}$$

c. Soit $C([0,a],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,a]$, à valeurs réelles. $(f,g) \mapsto \int_0^a fg$ est une application de $\big(C([0,a],\mathbb{R})\big)^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est :
– symétrique (commutativité du produit de fonctions);
– linéaire à gauche (calcul dans l'e.v. et linéarité de l'intégrale);
– définie positive : $\forall f \in C([0,a],\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $\int_0^a f^2 > 0$ par le théorème de stricte positivité des intégrales.
Cette application est donc un produit scalaire sur $C([0,a],\mathbb{R})$ et grâce à l'inégalité de Schwarz, on a :

$$\boxed{\forall (f,g) \in \big(C([0,a],\mathbb{R})\big)^2, \left|\int_0^a f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\left(\int_0^a f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^a g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)}.}$$

3. $\forall x \in E, \quad \varphi(x, 0_E) = \dfrac{1}{2}\big(N^2(x+0_E) - N^2(x) - N^2(0_E)\big) = -\dfrac{1}{2}N^2(0_E)$.
φ est linéaire à droite donc $\varphi(x,0_E) = 0$. D'où $N(0_E) = 0$.

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x,-x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\big(N^2(0_E) - N^2(x) - N^2(-x)\big) = -N^2(x) & \text{car } N(-x) = N(x) \\ -\varphi(x,x) & \text{(linéarité à droite)} \end{cases}$$

Donc, comme N est à valeurs positives : $N(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$.

$$\boxed{N \text{ est la norme hilbertienne associée à } \varphi.}$$

II. Équivalence de normes.

1. L'image du segment $[0,1]$ par l'application continue p est un segment $[p_0, p_1]$; comme pour tout x de $[0,1]$, $p(x) > 0$, $[p_0,p_1] \subset \mathbb{R}_+^*$ et en particulier $p_0 > 0$.
De même, l'image du segment $[0,1]$ par l'application continue q est un segment $[q_0, q_1]$ inclus dans $\mathbb{R}_+$ car pour tout x de $[0,1]$, $q(x) \geq 0$.

$$\boxed{\text{Il existe trois réels positifs } p_0,\ p_1 \text{ et } q_1 \text{ tels que : } \forall x \in [0,1], \quad 0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1 \quad \text{et} \quad q(x) \leq q_1.}$$

2. a. $L : v \mapsto \int_0^1 fv$ est une application de H dans $\mathbb{R}$; on a déjà rappelé au **I.2.c** qu'une application du type $(f,g) \mapsto \int_0^a fg$ est bilinéaire; la linéarité de L en résulte.

$$\boxed{L \text{ est une forme linéaire sur } H.}$$

b. On vérifie comme au **I.2.c** que $(u,v) \mapsto \int_0^1 uv + u'v'$ est une application de H^2 dans $\mathbb{R}$ symétrique et linéaire à gauche. Elle est positive, grâce à la positivité de l'intégrale. Montrons qu'elle est définie : soit $u \in H$ tel que $\int_0^1 u^2 + u'^2 = 0$. Alors comme la fonction $u^2 + u'^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, par le théorème de stricte positivité des intégrales, $\forall x \in [0,1], \quad u^2(x) + u'^2(x) = 0$. Les deux termes de la somme étant ≥ 0, on a nécessairement $\forall x \in [0,1], \quad u^2(x) = u'^2(x) = 0$ et en particulier, $u = 0_H$.

$$\boxed{\langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } H.}$$

c. On vérifie comme ci-dessus que $(u,v) \mapsto \int_0^1 quv + pu'v'$ est une application de H^2 dans $\mathbb{R}$ symétrique, linéaire à gauche et positive. Montrons qu'elle est définie : soit $u \in H$ tel que $\int_0^1 qu^2 + pu'^2 = 0$. On en déduit : $\forall x \in [0,1], \quad q(x)u^2(x) + p(x)u'^2(x) = 0$. Les deux termes de la somme étant ≥ 0, on a nécessairement $\forall x \in [0,1], \quad p(x)u'^2(x) = 0$ et comme $p(x) \neq 0$, c'est $u'(x)$ qui est nul. Donc u est une fonction constante. Comme $u(0) = 0$, c'est la fonction nulle.

$$\boxed{b \text{ est un produit scalaire sur } H.}$$

3. a. On peut appliquer l'inégalité du **I.2.c** avec $a = 1$ à la fonction f et à toute fonction v de H : $|L(v)| \leq \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2} \left(\int_0^1 v^2\right)^{1/2}$.
Comme $v'^2 \geq 0$, $\int_0^1 v^2 \leq \int_0^1 v^2 + v'^2$ d'où *a fortiori*, en notant $\gamma = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$:

$$\boxed{\exists \gamma \geq 0,\ \forall v \in H, \quad |L(v)| \leq \gamma \|v\|.}$$

b. Par l'inégalité de Schwarz : $|b(u,v)| \leq \sqrt{b(u,u)b(v,v)} = \left(\int_0^1 qu^2 + pu'^2\right)^{1/2} \left(\int_0^1 qv^2 + pv'^2\right)^{1/2}$.
$\int_0^1 qu^2 + pu'^2 \leq \int_0^1 q_1u^2 + p_1u'^2 \leq \delta \int_0^1 u^2 + u'^2 = \delta \|u\|^2$ avec $\delta = \max(p_1, q_1) > 0$. L'autre intégrale se majore de même, donc :

$$\boxed{\exists \delta > 0,\ \forall (u,v) \in H^2, \quad |b(u,v)| \leq \delta \|u\| \|v\|.}$$

4. a. Pour toute fonction v de H, et pour tout x de $[0,1]$: $v(x) = v(0) + \int_0^x v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x v'(t)\,\mathrm{d}t$ donc $|v(x)| = \left|\int_0^x v'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \left(\int_0^x 1\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \left(\int_0^x v'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leq \sqrt{x} \left(\int_0^1 v'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$ d'où

$$\boxed{\forall v \in H,\ \forall x \in [0,1], \quad v^2(x) \leq x \int_0^1 v'^2(t)\,\mathrm{d}t.}$$

b. Pour toute fonction v de H, $\|v\|^2 = \int_0^1 v^2(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 v'^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \left(x \int_0^1 v'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 v'^2(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + 1\right) \int_0^1 v'^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_0^1 v'^2(t)\,\mathrm{d}t$.
Donc $p_0\|v\|^2 \leq \frac{3p_0}{2} \int_0^1 v'^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{3}{2}\int_0^1 p(t)v'^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{3}{2}\int_0^1 \big(q(t)v^2(t) + p(t)v'^2(t)\big)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}b(v,v)$.

$$\boxed{\forall v \in H, \quad p_0\|v\|^2 \leq \frac{3}{2}b(v,v).}$$

5. Si u_1 et u_2 sont des fonctions de H vérifiant : $\forall v \in H,\ b(u_1,v) = b(u_2,v)$, alors $\forall v \in H,\ b(u_1 - u_2, v) = 0$ donc $u_1 - u_2 \in H^{\perp_b} = \{0_H\}$. Donc $\boxed{u_1 = u_2.}$

6. a. Une fonction u est dite de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0,1]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[0,1]$ telle que pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la restriction de u à $]x_{i-1}, x_i[$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_{i-1}, x_i]$. σ est alors dite adaptée à u.
Si u et v sont dans G, u' et v' sont continues par morceaux sur $[0,1]$ et on étend la définition de $\langle u,v \rangle$ par $\langle u,v \rangle = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(u(t)v(t) + u'(t)v'(t)\big)\,\mathrm{d}t$ où $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une subdivision adaptée à $uv + u'v'$. On peut

montrer de plus que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(u(t)v(t)+u'(t)v'(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est indépendante du choix de la subdivision adaptée à $uv+u'v'$, et on peut encore noter $\langle u,v\rangle=\int_0^1 uv+u'v'$.
On définit de manière analogue $b(u,v)$ avec u et v dans G.

b. Si $v\in G$ vérifie $b(v,v)=0$, alors $\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} qv^2+pv'^2=0$ où $(x_i)_{0\le i\le n}$ est une subdivision adaptée à $qv^2+pv'^2$. Cette somme de termes ≥ 0 est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, donc $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\int_{x_{i-1}}^{x_i} qv^2+pv'^2=0$ où v' désigne par abus le prolongement continu sur $[x_{i-1},x_i]$ de la restriction de v' à $]x_{i-1},x_i[$. On en déduit, de même qu'au **II.2.c.** que v est constante sur chaque intervalle $[x_{i-1},x_i]$. Par continuité de v, cette constante est la même sur chaque intervalle de la subdivision, et comme $v(0)=0$, v est la fonction nulle sur $[0,1]$.

III. Équation de Sturm-Liouville.

1. Dans le cas particulier $p:x\mapsto e^{-\alpha x}$, $q=0$ et $f:x\mapsto -2n_0\pi\cos(2n_0\pi x)$, l'équation $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu')+qu=f$ s'écrit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{-\alpha x}u')=2n_0\pi\cos(2n_0\pi x)$ d'où : $\exists\lambda\in\mathbb{R},\quad e^{-\alpha x}u'=\sin(2n_0\pi x)+\lambda$ puis
$u'=\sin(2n_0\pi x)\,e^{\alpha x}+\lambda\,e^{\alpha x}$.
$\int e^{2n_0\pi i x}\,e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+2n_0\pi i}e^{(\alpha+2n_0\pi i)x}$ d'où
$\int \sin(2n_0\pi x)\,e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x=\frac{\alpha}{\alpha^2+4n_0^2\pi^2}\sin(2n_0\pi x)\,e^{\alpha x}-\frac{2n_0\pi}{\alpha^2+4n_0^2\pi^2}\cos(2n_0\pi x)\,e^{\alpha x}$ et
$u=\frac{\alpha}{\alpha^2+4n_0^2\pi^2}\sin(2n_0\pi x)\,e^{\alpha x}-\frac{2n_0\pi}{\alpha^2+4n_0^2\pi^2}\cos(2n_0\pi x)\,e^{\alpha x}+\frac{\lambda}{\alpha}\,e^{\alpha x}+\mu,\quad(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2.$

Les conditions aux limites $u(0)=u(1)=0$ conduisent à $\begin{cases}\frac{\lambda}{\alpha}+\mu=\frac{2n_0\pi}{\alpha^2+4n_0^2\pi^2}\\ \frac{\lambda}{\alpha}\,e^{\alpha}+\mu=\frac{2n_0\pi}{\alpha^2+4n_0^2\pi^2}\,e^{\alpha}\end{cases}$

qui a pour unique solution $\mu=0$, $\lambda=\alpha\frac{2n_0\pi}{\alpha^2+4n_0^2\pi^2}$. Donc :

$$\boxed{u=e^{\alpha x}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2+4n_0^2\pi^2}\sin(2n_0\pi x)+\frac{2n_0\pi}{\alpha^2+4n_0^2\pi^2}\big(1-\cos(2n_0\pi x)\big)\right)}$$

2. $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu')+qu=f$ donc pour tout v de H, $-\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(pu')v+\int_0^1 quv=\int_0^1 fv$, et en intégrant par parties : $-\left[pu'v\right]_0^1+\int_0^1(pu')\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\int_0^1 quv=\int_0^1 fv$.
$v(0)=v(1)=0$ donc le terme tout-intégré est nul; il reste $\int_0^1 pu'v'+quv=\int_0^1 fv$, soit $b(u,v)=L(v)$.

$$\boxed{\text{(1) et (2) impliquent (3).}}$$

Si u est solution de (3), alors $b(u,v)$ ne dépend que de v; on a donc, si u_0 est aussi une solution de (3), $b(u,v)=b(u_0,v)$ pour tout v de H. D'après le **II.5.**, on a $u=u_0$, d'où l'unicité. Comme il est admis que le système constitué par (1) et (2) possède au moins une solution,

$$\boxed{\text{(3) admet une unique solution } u \text{ dans } H.}$$

3. a. Avec u solution de (3), on a, pour tout w de H :
$$\begin{aligned}J(u+w)&=\tfrac12 b(u+w,u+w)-L(u+w)=\tfrac12\big(b(u,u)+2b(u,w)+b(w,w)\big)-L(u)-L(w)\\&=\big(\tfrac12 b(u,u)-L(u)\big)+\big(b(u,w)-L(w)\big)+\tfrac12 b(w,w)=J(u)+\tfrac12 b(w,w)\geq J(u)\end{aligned}$$
Il en résulte, en posant $w=v-u$:
$$\boxed{\forall v\in H,\quad J(u)\leq J(v).}$$

b. Avec $u_0\in H$ tel que $\forall v\in H$, $J(u_0)\leq J(v)$, on a, pour tout réel λ et tout w de H :
$$\begin{aligned}J(u_0+\lambda w)-J(u_0)&=\tfrac12 b(u_0+\lambda w,u_0+\lambda w)-L(u_0+\lambda w)-J(u_0)\\&=\tfrac12\big(b(u_0,u_0)+2\lambda b(u_0,w)+\lambda^2 b(w,w)\big)-L(u_0)-\lambda L(w)-J(u_0)\\&=\big(\tfrac12 b(u_0,u_0)-L(u_0)\big)-J(u_0)+\lambda b(u_0,w)-\lambda L(w)+\tfrac{\lambda^2}{2}b(w,w)\\&=\lambda\big(b(u_0,w)-L(w)\big)+\tfrac{\lambda^2}{2}b(w,w)\end{aligned}$$

Donc, pour tout λ de $\mathbb{R}$, $\frac{\lambda^2}{2}b(w,w)+\lambda\big(b(u_0,w)-L(w)\big)\geq 0$. Pour $w\neq 0$, on a un trinôme en λ de signe constant donc son discriminant est ≤ 0, ce qui équivaut à $\big(b(u_0,w)-L(w)\big)^2\leq 0$ soit encore à $b(u_0,w)=L(w)$. Si $w=0$, cette égalité est encore vraie donc :

$$\boxed{\forall w\in H,\quad b(u_0,w)=L(w).}$$

4. **a.** Pour tout w de W : $w-u=\big(w-\pi_W(u)\big)+\big(\pi_W(u)-u\big)$ avec $w-\pi_W(u)\in W$ et $\pi_W(u)-u\in W^{\perp_b}$ donc par le théorème de Pythagore : $b(w-u,w-u)=b\big(w-\pi_W(u),w-\pi_W(u)\big)+b\big(\pi_W(u)-u,\pi_W(u)-u\big)$ d'où :

$$\boxed{\forall w\in W,\quad b(w-u,w-u)\geq b\big(\pi_W(u)-u,\pi_W(u)-u\big).}$$

b. u désigne toujours une solution du problème de Sturm-Liouville, et u_W est un élément quelconque de G.
Condition nécessaire : si $u_W=\pi_W(u)$, alors $u_W\in\mathrm{Im}(\pi_W)=W$.
De plus, en notant $z=u-u_W$, z est dans $W^{\perp_b}$ donc pour tout v de W :
$b(u,v)=b(u_W+z,v)=b(u_W,v)+b(z,v)=b(u_W,v)$. Comme u vérifie (3), on a $b(u_W,v)=L(v)$.
Condition suffisante : si $u_W\in W$ et $b(u_W,v)=L(v)$ pour tout v de W, alors, en posant $z=u-u_W$, $b(z,v)=b(u,v)-b(u_W,v)=L(v)-L(v)=0$ pour tout v de W donc $z\in W^{\perp_b}$. On a $u=u_W+z$ avec $(u_W,z)\in W\times W^{\perp_b}$, donc u_W est le projeté orthogonal de u sur W pour le produit scalaire b : $u_W=\pi_W(u)$.

$$\boxed{\text{Étant donné } u_W \text{ dans } G\text{, il y a équivalence entre : } u_W=\pi_W(u)\quad\text{et}\quad\begin{cases}u_W\in W\\ \forall v\in W,\quad b(u_W,v)=L(v)\end{cases}}$$

c. u_W désigne ici $\pi_W(u)$, et on a : $u_W=\sum_{i=1}^d\alpha_i\varphi_i$.
En appliquant la propriété : $\forall v\in W,\quad b(u_W,v)=L(v)$ pour $v=\varphi_i$, $(i\in[\![1,d]\!])$, on a :
$\forall i\in[\![1,d]\!],\quad b\left(\sum_{j=1}^d\alpha_j\varphi_j,\varphi_i\right)=L(\varphi_i)$ donc, par linéarité à gauche et symétrie :

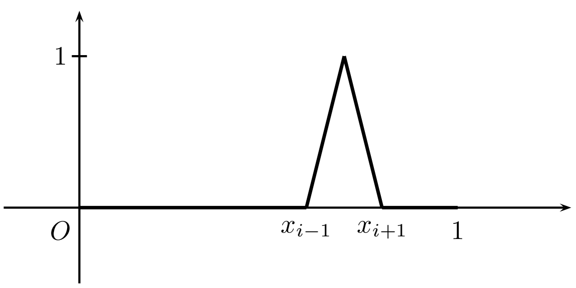
$$\boxed{(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\text{ sont solutions du système : }\forall i\in[\![1,d]\!],\quad \sum_{j=1}^d b(\varphi_i,\varphi_j)\,\alpha_j=L(\varphi_i)\qquad (4).}$$

La matrice B de ce système est la matrice de la restriction de la forme bilinéaire symétrique b à W dans la base $(\varphi_i)_{1\leq i\leq d}$. En notant V le vecteur colonne des coordonnées dans cette base de $v\in W$, on a : $BV=0\Rightarrow {}^tVBV=0\Leftrightarrow b(v,v)=0\Rightarrow v=0$ car b est définie. Donc $\mathrm{rg}(B)=d$ et

$$\boxed{\text{Le système (4) est de Cramer.}}$$

IV. Approximations de la solution u.

1. **a.** Courbe de φ_i : $\begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \begin{cases}1-\frac{|x-x_i|}{h} & \text{si } x\in[x_{i-1},x_{i+1}]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{array}$



b. Commençons par constater que pour tout i de $[\![1,n]\!]$, φ_i est dans G, donc $W_n=\mathrm{vect}(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est un sous-espace vectoriel de G. De plus, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $\varphi_i(x_j)=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Donc, si $\varphi = \sum_{i=1}^n t_i\varphi_i$, on a : $\varphi(x_j) = t_j$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!], \quad t_i = \varphi(x_i).}$$

Supposons que l'on ait $\sum_{i=1}^n t_i\varphi_i = 0_G$. Alors, d'après ce qui précède, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, $t_i = 0_G(x_i) = 0$. Donc la famille $(\varphi_i)_{1\le i\le n}$ est libre.

$$\boxed{(\varphi_i)_{1\le i\le n} \text{ est une base de } W_n.}$$

c. Soit (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ vérifiant $|j-i|\ge 2$. $]x_{i-1},x_{i+1}[\cap[x_{j-1},x_{j+1}] = \emptyset$ donc $\varphi_i(x)\ne 0 \Rightarrow \varphi_j(x) = 0$ d'où pour tout x de $[0,1]$, $\varphi_i(x)\,\varphi_j(x) = 0$.
Sur $[0,1]\setminus\{x_0,\dots,x_{n+1}\}$, chaque fonction φ_i est dérivable et on constate de même que pour tout x de cet ensemble, $\varphi_i'(x)\,\varphi_j'(x) = 0$.
Donc $b(\varphi_i,\varphi_j) = \sum_{k=1}^{n+1}\int_{x_{k-1}}^{x_k} q\varphi_i\varphi_j + p\varphi_i'\varphi_j' = 0$.

$$\boxed{\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } |j-i|\ge 2, \quad b(\varphi_i,\varphi_j) = 0.}$$

2. a. φ_i' est l'application de $[0,1]\setminus\{x_{i-1},x_i,x_{i+1}\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{si } x\in]x_{i-1},x_i[\\ -\frac{1}{h} & \text{si } x\in]x_i,x_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Avec $p(x) = e^{-\alpha x}$ ($\alpha\ne 0$) et $q=0$, on a :

$$\begin{aligned} b(\varphi_i,\varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \tfrac{1}{h^2}e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{h^2}\left[-\tfrac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right]_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} = \tfrac{1}{\alpha h^2}\left(e^{-\alpha x_{i-1}} - e^{-\alpha x_{i+1}}\right) = \tfrac{1}{\alpha h^2}\left(e^{-\alpha(i-1)h} - e^{-\alpha(i+1)h}\right) \\ &= \tfrac{1}{\alpha h^2}e^{-\alpha i h}\left(e^{\alpha h} - e^{-\alpha h}\right) = \tfrac{2\,\mathrm{sh}(\alpha h)}{\alpha h^2}e^{-\alpha i h}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\varphi_{i-1},\varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(-\tfrac{1}{h^2}\right)e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{\alpha h^2}\left(e^{-\alpha x_i} - e^{-\alpha x_{i-1}}\right) = \tfrac{1}{\alpha h^2}\left(e^{-\alpha i h} - e^{-\alpha(i-1)h}\right) \\ &= \tfrac{1}{\alpha h^2}e^{-\alpha(i-1/2)h}\left(e^{-\alpha h/2} - e^{\alpha h/2}\right) = -\tfrac{2\,\mathrm{sh}(\alpha h/2)}{\alpha h^2}e^{-\alpha(i-1/2)h}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{b(\varphi_i,\varphi_j) = \begin{cases} \frac{2\,\mathrm{sh}(\alpha h)}{\alpha h^2}e^{-\alpha i h} & \text{si } i=j \\ -\frac{2\,\mathrm{sh}(\alpha h/2)}{\alpha h^2}e^{-\alpha(\frac{i+j}{2})h} & \text{si } i\ne j \text{ et } |j-i|\le 1 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$$

b. Dans le cas $n=2$, le déterminant du système (4) est :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b(\varphi_1,\varphi_1) & b(\varphi_1,\varphi_2) \\ b(\varphi_2,\varphi_1) & b(\varphi_2,\varphi_2)\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \frac{2\,\mathrm{sh}(\alpha h)}{\alpha h^2}e^{-\alpha h} & -\frac{2\,\mathrm{sh}(\alpha h/2)}{\alpha h^2}e^{-3\alpha h/2} \\ -\frac{2\,\mathrm{sh}(\alpha h/2)}{\alpha h^2}e^{-3\alpha h/2} & \frac{2\,\mathrm{sh}(\alpha h)}{\alpha h^2}e^{-2\alpha h}\end{vmatrix} \\ &= \frac{4e^{-2\alpha h}}{\alpha^2h^4}\begin{vmatrix} \mathrm{sh}(\alpha h) & -\mathrm{sh}(\alpha h/2)e^{-\alpha h/2} \\ -\mathrm{sh}(\alpha h/2)e^{-\alpha h/2} & \mathrm{sh}(\alpha h)e^{-\alpha h}\end{vmatrix} = \frac{4e^{-3\alpha h}}{\alpha^2h^4}\left(\mathrm{sh}^2(\alpha h) - \mathrm{sh}^2(\alpha h/2)\right) \\ &= \frac{4e^{-3\alpha h}}{\alpha^2h^4}\,\mathrm{sh}^2(\alpha h/2)\left(4\,\mathrm{ch}^2(\alpha h/2) - 1\right) = \frac{324e^{-\alpha}}{\alpha^2}\,\mathrm{sh}^2(\alpha/6)\left(4\,\mathrm{ch}^2(\alpha/6) - 1\right) \ne 0 \end{aligned}$$

On retrouve bien que le système est de Cramer.

3. a. Remarquons au préalable que pour tout i de $[\![0,n+1]\!]$, $w_n(x_i) = u(x_i)$, donc w_n est une fonction affine par morceaux qui interpole u aux points de la subdivision $(x_i)_{0\le i\le n+1}$.
Pour établir l'égalité, comparons les dérivées des deux membres sur $]x_{i-1},x_i[$.
D'une part : $\forall x\in[x_{i-1},x_i], \quad u(x) - w_n(x) = u(x) - \big(u(x_{i-1})\varphi_{i-1}(x) + u(x_i)\varphi_i(x)\big)$ donc :
$\forall x\in]x_{i-1},x_i[, \quad (u-w_n)'(x) = u'(x) - \frac{1}{h}\big(-u(x_{i-1}) + u(x_i)\big)$.
D'autre part : $(t,y)\mapsto\int_y^t u''(z)\,\mathrm{d}z = u'(t) - u'(y)$ est une fonction continue sur $[x_{i-1},x_i]^2$. Il en résulte, par le théorème de continuité des intégrales à paramètre, que la fonction $\psi\ : t\mapsto\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_y^t u''(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y$ est

continue sur $[x_{i-1},x_i]$. Par le théorème fondamental du calcul intégral, il s'ensuit que la fonction $\Psi\ : x \mapsto \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x} \psi(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_{i-1},x_i]$, et que pour tout x de $[x_{i-1},x_i]$:
$\Psi'(x) = \frac{1}{h}\psi(x) = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_y^x u''(z)\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\big(u'(x)-u'(y)\big)\,\mathrm{d}y = u'(x) - \frac{1}{h}\big(u(x_i)-u(x_{i-1})\big)$.
On a donc, pour tout x de $]x_{i-1},x_i[$, $\quad (u-w_n)'(x) = \Psi'(x)$. Comme $u-w_n$ et Ψ sont continues sur $[x_{i-1},x_i]$, et que $(u-w_n)(x_{i-1}) = \Psi(x_{i-1}) = 0$, on a bien $(u-w_n)(x) = \Psi(x)$ pour tout x de $[x_{i-1},x_i]$.

$$\boxed{\forall x \in [x_{i-1},x_i], \quad u(x) - w_n(x) = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_y^t u''(z)\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}t.}$$

b. Supposons $y \leq t$. Alors, en adaptant le **I.2.c.** (borne 0...) :

$$\left|\int_y^t u''(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \left(\int_y^t 1\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}\left(\int_y^t u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2} \leq \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} 1\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}$$
$$\leq h^{1/2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2} \qquad \text{car } [y,t] \subset [x_{i-1},x_i].$$

On arrive à la même majoration si $y \geq t$. Donc, pour tout x de $[x_{i-1},x_i]$:

$$|u(x) - w_n(x)| \leq \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\int_y^t u''(z)\,\mathrm{d}z\right|\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(h^{1/2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}\right)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x}\left(h^{3/2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}\right)\,\mathrm{d}t = h^{1/2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}(x - x_{i-1})$$
$$\leq h^{3/2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}.$$

$$\boxed{\forall x \in [x_{i-1},x_i], \quad |u(x) - w_n(x)| \leq h^{3/2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}.}$$

c. On a vu au **a.** que pour tout x de $]x_{i-1},x_i[$, $\quad u'(x) - w_n'(x) = \Psi'(x) = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_y^x u''(z)\,\mathrm{d}z\right)\,\mathrm{d}y$ et comme, grâce au **b.**, $\left|\int_y^x u''(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq h^{1/2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}$, on a :
$|u'(x) - w_n'(x)| \leq \frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} h^{1/2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}\,\mathrm{d}y = h^{1/2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}$.

$$\boxed{\forall x \in]x_{i-1},x_i[, \quad |u'(x) - w_n'(x)| \leq h^{1/2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}.}$$

4. Notons pour abréger $M_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z$. En utilisant les majorations des deux questions précédentes : $\|u-w_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(u-w_n)^2 + (u'-w_n')^2 \leq \sum_{i=1}^{n+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} h^3M_i + hM_i = \sum_{i=1}^{n+1} h(h^3M_i + hM_i) = h^2(h^2+1)\sum_{i=1}^{n+1}\int_{x_{i-1}}^{x_i} u''^2(z)\,\mathrm{d}z = h^2(h^2+1)\int_0^1 u''^2(z)\,\mathrm{d}z$.
Comme $h \leq \frac{1}{2}$, on a *a fortiori* :

$$\boxed{\|u - w_n\| \leq \frac{h\sqrt{5}}{2}\left(\int_0^1 u''^2(z)\,\mathrm{d}z\right)^{1/2}.}$$

Interprétation : la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ converge vers u au sens de la norme $\|.\|$, donc aussi au sens de la norme $v \mapsto \sqrt{b(v,v)}$ (puisqu'on a vu au **II.** que ces normes sont équivalentes).