Durin Jean Pierre
6 Allée des Lauriers
71250 CLUNY.
Tél: 03.85.59.16.48.

Controle à postériori de l'épreuve

Banque PT: MATHS II-A.

Premier exercice.

1°) Soit à calculer $I(x)=\int_0^x Arc\tan(2t)\,dt$. Effectuons une intégration par parties en posant:

$\begin{cases} u = Arc\tan(2t) \\ v'=1 \end{cases}$ on a $\begin{cases} u'=\dfrac{2}{1+4t^2} \\ v=t \end{cases}$ d'où $I(x)=tArc\tan(2t)\Big]_0^x-\int_0^x \dfrac{2t}{1+4t^2}dt$ soit enfin:

$$I(x)=xArc\tan(2x)-\frac{1}{4}\ln(1+4t^2)\Big]_0^x$$

<u>**conclusion**</u> $\int_0^x Arc\tan(2t)\,dt = xArc\tan(2x)-\frac{1}{4}\ln(1+4x^2)$.

2°) La formule des accroissements finis donne:

$\forall x\in \mathbf{R}$, $\exists\theta(x)\in\,]0,1[$; $\sin x-\sin 0 = x\cos(x\theta(x))$ d' où $|\sin x| = |x\cos(x\theta(x))|\le |x|$.

<u>**conclusion**</u> $\forall x\in\mathbf{R}$, $|\sin x|\le|x|$.

3°) Etude de la fonction f définie par $f(x)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}\,dt$.

- <u>Domaine de définition:</u>

  $\forall x\in\mathbf{R}$, $t\mapsto \dfrac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$,(prolongement par continuité en 0 par x^2)

  elle est donc localement intégrable sur cet intervalle. Le seul problème d' intégrale généralisée est donc en $+\infty$. Or, au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}\le e^{-t}$ et $\int_1^{+\infty}e^{-t}dt=e^{-1}$ est convergente.

  Le théorème de comparaison pour les fonctions positives assure la convergence de $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}\,dt$.

  <u>**conclusion**</u> $Def(f)=\mathbf{R}$ et f est une fonction paire.

- <u>Continuité:</u>

  Soit $h(x,t)=\dfrac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}$. h est continue sur $\mathbf{R}\times[0,+\infty[$. On va alors écrire :

  $$f(x)=\int_0^1\frac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}\,dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2(xt)}{t^2}e^{-t}\,dt=f_1(x)+f_2(x).$$

  - Le théorème simple concernant la continuité d' une intégrale au sens de Riemann dépendant d' un paramètre s' applique sur $\mathbf{R}\times[0,1[$, f_1 est continue sur $\mathbf{R}$.

- Sur $\mathbf{R}\times[1,+\infty[$, $|h(x,t)|\leq e^{-t}$, fonction indépendante de x, continue sur $[1,+\infty[$ et telle que $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-1}$ est convergente. Le théorème de continuité d'une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre s'applique, f_2 est continue sur $\mathbf{R}$.

conclusion f est continue sur $\mathbf{R}$.

- Dérivabilité:

$\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\sin(2xt)}{t}e^{-t}$ est continue sur $\mathbf{R}\times[0,+\infty[$, (prolongement par continuité en un point $(x,0)$ par $2x$)

  - Le théorème simple concernant la dérivabilité d'une intégrale au sens de Riemann dépendant d'un paramètre s'applique sur $\mathbf{R}\times[0,1[$, f_1 est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et
  $\forall x\in\mathbf{R}$, $f_1'(x) = \int_0^1 \dfrac{\sin(2xt)}{t}e^{-t}\,dt$.
  - Sur $\mathbf{R}\times[1,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right|\leq e^{-t}$, fonction indépendante de x, continue sur $[1,+\infty[$ et telle que $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = e^{-1}$ est convergente. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre s'applique, f_2 est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ et
  $\forall x\in\mathbf{R}$, $f_2'(x) = \int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(2xt)}{t}e^{-t}\,dt$.

conclusion f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, et $\forall x\in\mathbf{R}$, $f'(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin(2xt)}{t}e^{-t}\,dt$.

- Dérivée seconde:

$\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = 2\cos(2xt)\,e^{-t}$ est continue sur $\mathbf{R}\times[0,+\infty[$. On peut cette fois conclure directement:

Sur $\mathbf{R}\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right|\leq 2e^{-t}$, fonction indépendante de x, continue sur $[0,+\infty[$ et telle que $\int_0^{+\infty} 2e^{-t}\,dt = 2$ est convergente. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale pour une intégrale généralisée dépendant d'un paramètre s'applique, f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et

$\forall x\in\mathbf{R}$, $f''(x) = \int_0^{+\infty} 2\cos(2xt)\,e^{-t}\,dt$.

conclusion f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$, et $\forall x\in\mathbf{R}$, $f''(x) = \int_0^{+\infty} 2\cos(2xt)\,e^{-t}\,dt$.

NB: Je n'ai pas vu l'intérêt de faire prouver le caractère C^2 de f sur $]-a,a[$, puisque on peut l'obtenir directement le résultat sur $\mathbf{R}$.

4°) Calcul de $f''(x)$.

Une primitive de $2\cos(2xt)\,e^{-t}$ est de la forme $A = e^{-t}[a\cos(2xt)+b\sin(2xt)]$. On a:

$A' = e^{-t}[(-a+2xb)\cos(2xt)+(-2ax-b)\sin(2xt)]$ ce qui conduit au système:

$\begin{cases} -a+2xb = 2 \\ -2xa-b = 0 \end{cases}$ d'où $a = -\dfrac{2}{1+4x^2}$, $b = \dfrac{4x}{1+4x^2}$ et par suite :

$$f''(x) = \frac{2}{1+4x^2}[-\cos(2xt) + 2x\sin(2xt)]\, e^{-t}\Big]_{t=0}^{t=+\infty}$$

<u>**conclusion**</u> $f''(x) = \dfrac{2}{1+4x^2}$.

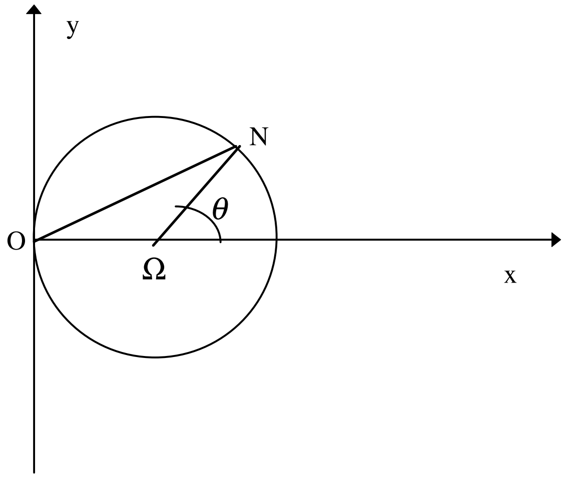
5°) Comme $f'(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \int_0^x \frac{2}{1+4t^2}\, dt = Arc\tan(2x)$.

Comme $f(0) = 0$, on a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \int_0^x Arc\tan(2t)\, dt$ et donc :

<u>**conclusion**</u> $f(x) = xArc\tan(2x) - \dfrac{1}{4}\ln(1+4x^2)$.

Deuxième exercice.

1°) Le point N est défini par $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega N}$.



2°) Les coordonnées de N sont: $x = 1 + \cos\theta$, $y = \sin\theta$.

La hauteur issue de N a pour équation: $x = 1 + \cos\theta$.

La hauteur issue de Ω a pour équation $(1+\cos\theta)(x-1) + y\sin\theta = 0$.

L' orthocentre H du triangle OΩ N a donc pour coordonnées:

$$\begin{cases} x_H = 1 + \cos\theta \\ y_H = -\dfrac{\cos\theta(1+\cos\theta)}{\sin\theta} \end{cases} \qquad \theta \in \left]-\pi, \pi\right[\setminus \{0\}.$$

<u>Rq</u>: Quand $\theta \to \pm\pi$ $\quad H \to 0$.

Quand $\theta \to 0$ $\quad x_H \to 2$ $\quad y_H \to \pm\infty$, il y a asymptote d' équation $x = 2$.

Si on prend pour nouveau paramètre $t = \tan(\dfrac{\theta}{2})$, $t \in \mathbf{R}^*$ les coordonnées de H deviennent:

$$\begin{cases} x_H = 1 + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ y_H = -\dfrac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\left(1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}{\dfrac{2t}{1+t^2}} \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}^* \qquad \text{soit : } (\Gamma) : \begin{cases} x = \dfrac{2}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^2-1}{t(t^2+1)} \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}^*$$

Rq: En reprenant le paramétrage en θ , on a $\begin{cases} x-1=\dfrac{\cos\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})}\sin(\frac{\theta}{2}) \\ y=-\dfrac{\cos\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})}\cos(\frac{\theta}{2}) \end{cases}$ soit

$$\begin{cases} x-1=\dfrac{\cos\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})}\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}) \\ y=\dfrac{\cos\theta}{\sin(\frac{\theta}{2})}\sin(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}) \end{cases}.$$

Dès lors, en prenant des coordonnées polaires de centre Ω, avec $\omega=\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}$, l' équation polaire de (Γ) est:

$\rho=-\dfrac{\cos(2\omega)}{\cos\omega}$ et on reconnait la strophoïde.

3°) Equation de la droite Δ_t passant par les points $M_1(t)$ et $M_2(\frac{1}{t})$.

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{pmatrix} \dfrac{2(t^2-1)}{t^2+1} \\ \dfrac{t^2(1-t^2)+1-t^2}{t(t^2+1)} \end{pmatrix} \text{ est parallèle à } \begin{pmatrix} \dfrac{2}{t^2+1} \\ \dfrac{-1}{t} \end{pmatrix}$$

(le cas $t=\pm1$ qui correspond à $M_1=M_2=\Omega$ étant à exclure, car alors la droite M_1M_2 n' est pas définie).

Equation de la droite Δ_t : $\frac{1}{t}(x-\frac{2}{t^2+1})+\frac{2}{t^2+1}(y-\frac{t^2-1}{t(t^2+1)})=0$ soit sous une autre forme:

$$\Delta_t : x+\frac{2t}{t^2+1}-\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^2=0.$$

On voit que le bon paramètre pour étudier l' enveloppe de la famille des Δ_t est $u=\dfrac{2t}{t^2+1}=\sin\theta$

et par suite avec $u\in\left]-1,1\right[\setminus\{0\}$. On a alors $\Delta_u : u^2-uy-x=0$, et la résolution du système $\begin{cases}\Delta_u\\ \Delta'_u\end{cases}$

revient à écrire que l' équation du deuxième degré en u a une racine double.

L' enveloppe est donc incluse dans la parabole d' équation $y^2+4x=0$.

Plus précisément, on a : $\Delta'_u : 2u-y=0$ et donc le paramétrage de l' enveloppe est:

$$(E):\begin{cases} x=-u^2 \\ y=2u \end{cases} \quad u\in\left]-1,1\right[\setminus\{0\}$$

<u>conclusion</u> (E) est la partie de la parabole d' équation $y^2=-4x$ $\quad -2<y<2 \quad y\neq0$.

4°) <u>Intersection de la droite</u> $y = ax$ <u>avec</u> (Γ).

L' équation aux t des points d' intersection est : $\dfrac{t^2-1}{t(t^2+1)} = a\dfrac{2}{t^2+1}$ soit : $t^2 - 2at - 1 = 0$.

- On ne retrouve pas l' origine au moyen de cette relation car 0 est obtenu pour $t \to \pm\infty$.
- L' équation est du deuxième degré avec $\Delta' = a^2 + 1 > 0$. Elle admet donc toujours deux racines t_1 et t_2 distinctes.

  Lorsque $a \neq 0$, t_1 et t_2 sont différents de ± 1 et les points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont distincts.

  Lorsque $a = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -1$ et les points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ sont confondus avec Ω.

Le point P a pour coordonnées $(1, a)$.

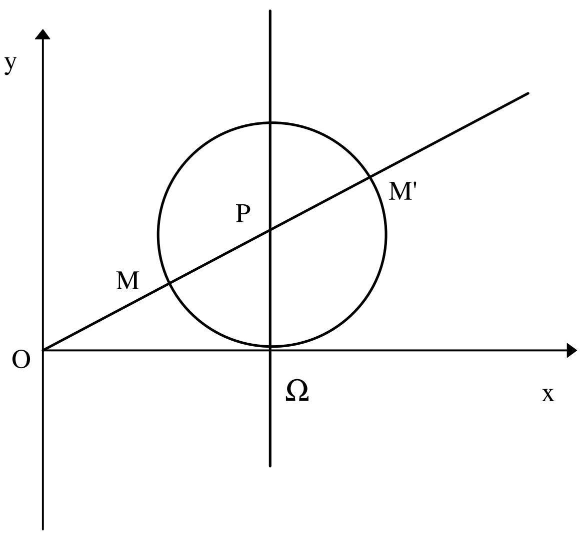
On a $\overrightarrow{P\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ d' où $\left\|\overrightarrow{P\Omega}\right\|^2 = a^2$.

$\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{PM'}$ ont pour composantes $\begin{pmatrix} \dfrac{2}{t^2+1} - 1 \\ \dfrac{t^2-1}{t(t^2+1)} - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{at+1} - 1 \\ \dfrac{a}{at+1} - a \end{pmatrix}$ puisque $t^2 - 2at - 1 = 0$.

soit encore: $\dfrac{1}{at+1}\begin{pmatrix} -at \\ -a^2 t \end{pmatrix}$ de sorte que $\left\|\overrightarrow{PM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{PM'}\right\|^2 = a^2$

<u>conclusion</u> $\left\|\overrightarrow{PM}\right\| = \left\|\overrightarrow{PM'}\right\| = \left\|\overrightarrow{P\Omega}\right\| = |a|$.

<u>D' où une construction géométrique des points de</u> (Γ).



Troisième exercice.

1°) Soit $(S): x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 2$; $(P_\lambda): z = \lambda y + 1$; $(C_\lambda) = (S) \cap (P_\lambda)$.

(S) est une quadrique qui, quand on l' a coupe par des plans:

$x = Cte$ fournit des hyperboles.

$y = Cte$ ellipses.

$z = Cte$ hyperboles.

(S) est un hyperboloïde à une nappe. Il n' est pas de révolution car dans son équation "quasi réduite", les coefficients de x^2 et z^2 sont distincts.

2°) L' aire du domaine intérieur à l' ellipse d' équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ est :

$A = \iint_D dxdz$, $D = \left\{(x,z);\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \le 1\right\}$. On fait le changement de variables classique:

$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = b\rho\sin\theta & 0 \le \rho \le 1 \end{cases}$ $Jac = ab\rho$. On a alors: $A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 ab\rho\, d\rho\, d\theta$. On intègre sur un pavé une fonction, produit d' une fonction constante de θ par une fonction de ρ .

L' intégrale se transforme en un produit de deux intégrales simples.

<u>conclusion</u> $A = ab\int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 \rho\, d\rho = \pi ab$.

Le volume demandé s' obtient en intégrant de 0 à 1 l' aire de la section d' indice y de (S).

La section (S_y) de (S) par le plan parallèle à Oxz d' ordonnée y est l' ellipse d' équation

$\frac{x^2}{2(1+y^2)} + \frac{z^2}{1+y^2} = 1$, dont l' aire est $\pi\sqrt{2}(1+y^2)$ et ainsi $V = \int_0^1 \pi\sqrt{2}(1+y^2)\, dy = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$.

<u>conclusion</u> $V = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$.

3°) Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ fixé. $(C_\lambda): \begin{cases} z = \lambda y + 1 \\ x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 2 \end{cases}$. L' équation de la projection orthogonale de (C_λ) sur Oxy s' obtient en éliminant z entre les deux équations. On obtient:

$x^2 - 2y^2 + 2(\lambda y + 1)^2 - 2 = 0$ soit : $x^2 + 2(\lambda^2 - 1)y^2 + 4\lambda y = 0$.

Il s' agit de l' équation d' une conique dont la nature est donnée par le signe de $\lambda^2 - 1$.

<u>conclusion</u> $\begin{cases} |\lambda| > 1 & \text{il s'agit d'une ellipse} \\ |\lambda| = 1 & \text{il s'agit d'une parabole} \\ |\lambda| < 1 & \text{il s'agit d'une hyperbole} \end{cases}$

<u>Etude des cas demandés:</u>

- $\lambda = 0$; $x^2 - 2y^2 = 0$ la projection est alors la réunion des deux droites d' équations $x = \pm\sqrt{2}y$.
  (on est cependant dans le cas type hyperbole)

• $\lambda = \dfrac{1}{2}$; $x^2 - \dfrac{3}{2}y^2 + 2y = 0$ soit $x^2 - \dfrac{3}{2}(y - \dfrac{2}{3})^2 + \dfrac{2}{3} = 0$ soit enfin $\dfrac{\left(y - \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} - \dfrac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 1$.

C' est l' équation réduite d' une hyperbole.

• $\lambda = 1$; $x^2 + 4y = 0$ la projection est alors une parabole.

• $\lambda = 2$; $x^2 + 6y^2 + 8y = 0$ soit $x^2 + 6(y + \dfrac{2}{3})^2 - \dfrac{8}{3} = 0$ soit enfin $\dfrac{\left(y + \frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} + \dfrac{x^2}{\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = 1$.

C' est l' équation réduite d' une ellipse.

Ceci permet de déduire la nature de (C_λ) que l' on peut interpréter comme l' intersection du cylindre de génératrices parallèles à Oz et de base les coniques précédentes, avec le plan (P_λ). Les (C_λ) sont de même nature que ces coniques.

conclusion (C_0) est constituée des deux droites $\begin{cases} z = 1 \\ x = \sqrt{2}y \end{cases}$ et $\begin{cases} z = 1 \\ x = -\sqrt{2}y \end{cases}$ et pour le reste:

$$\begin{cases} |\lambda| > 1 & (C_\lambda) \text{ est une ellipse} \\ |\lambda| = 1 & (C_\lambda) \text{ est une parabole} \\ |\lambda| < 1 & (C_\lambda) \text{ est une hyperbole} \end{cases}$$

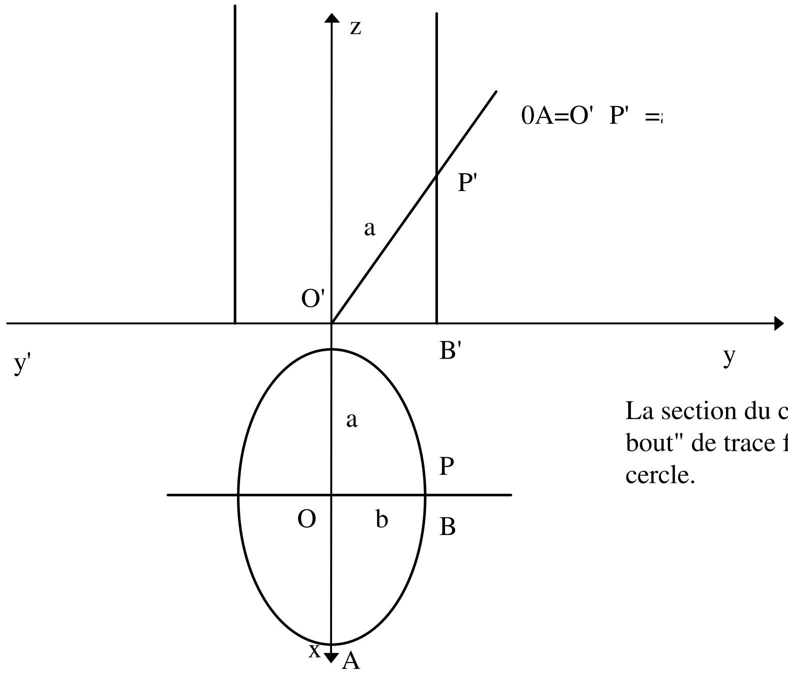
(C_λ) peut-elle être un cercle?

A priori, il n' est pas impossible que (C_λ) soit un cercle. Si c' est le cas ce sera pour des valeurs de λ de module strictement plus grand que 1. Mais ceci semble être l' objet de la dernière question.

Rq: Sur un cylindre ayant une base elliptique, il existe toujours des sections qui sont des cercles. En effet, sans restreindre la généralité, on peut supposer que le cylindre a ses génératrices parallèles à Oz et a pour base l' ellipse du plan $z = 0$, d' équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$.

Alors, la section du cylindre par un plan "de bout" d' équation $z = my$ est une ellipse dont l' un des axes est porté par Ox et a pour demi longueur a, et dont l' autre est porté par l' intersection des plans $x = 0$ et $z = my$ et a pour demi longueur $b\sqrt{1 + m^2}$.

On aura donc un cercle lorsque $a = b\sqrt{1 + m^2}$ soit $m = \pm\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$. On peut donc prendre par exemple $m =$ excentricité de l' ellipse de base.



La section du cylindre par le plan "de bout" de trace frontale O' P' est un cercle.

4°) Un vecteur orthogonal au plan (P_λ) est $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$. On choisira par exemple $\vec{K} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$. On peut alors prendre $\vec{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{J} = \vec{K} \wedge \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$, d' où la matrice de passage suivante:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} & \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ 0 & -\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{pmatrix} \text{ et les formules de passage: } \begin{cases} x = X \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(-Y+\lambda Z) \\ y = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}(-\lambda Y - Z) \end{cases}$$

<u>L' équation de</u> (S) <u>dans ce nouveau repère est</u> :

$$X^2 - \frac{2}{\lambda^2+1}(-Y+\lambda Z)^2 + \frac{2}{\lambda^2+1}(\lambda Y + Z)^2 - 2 = 0 \quad \text{soit :}$$

<u>conclusion</u> Dans $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ (S) : $X^2 + 2\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}(Y^2 - Z^2) + 8\frac{\lambda}{\lambda^2+1}YZ - 2 = 0$.

<u>L' équation de</u> (P_λ) <u>dans le nouveau repère est</u> : $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}(-\lambda Y - Z) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+1}}(-Y+\lambda Z) + 1$

soit: $Z = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}}$.

(C_λ) <u>est alors définie dans</u> $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ par :

$$\begin{cases} Z = -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \\ X^2 + 2\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}Y^2 - 8\dfrac{\lambda}{(\lambda^2+1)\sqrt{\lambda^2+1}} - 2 - 2\dfrac{\lambda^2-1}{(\lambda^2+1)^2} = 0 \end{cases}$$ soit

$$\begin{cases} Z = -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \\ X^2 + 2\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\left(Y - \dfrac{2\lambda}{(\lambda^2-1)\sqrt{\lambda^2+1}}\right)^2 = K \end{cases}$$ avec $K = \dfrac{[2(\lambda^2+1)^2 + 2(\lambda^2-1)](\lambda^2-1) + 8\lambda^2}{(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)^2}$

soit encore $K = \dfrac{2\lambda^6 + 4\lambda^4 + 2\lambda^2}{(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)^2} = \dfrac{2\lambda^2}{\lambda^2-1}$.

<u>conclusion</u> Dans $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$, (C_λ) : $$\begin{cases} Z = -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2+1}} \\ X^2 + 2\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1}\left(Y - \dfrac{2\lambda}{(\lambda^2-1)\sqrt{\lambda^2+1}}\right)^2 = \dfrac{2\lambda^2}{\lambda^2-1} \end{cases}$$

Ce sera un cercle si $2\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda^2+1} = 1$ soit $\lambda^2 - 3 = 0$. Il y a donc deux valeurs possibles de λ. D' où :

• $(C_{\sqrt{3}}) : \begin{cases} Z = -\dfrac{1}{2} \\ X^2 + (Y - \dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3 \end{cases}$ dans le repère $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ associé à $\lambda = \sqrt{3}$ et dans le repère fixe d' origine $(C_{\sqrt{3}}) : \begin{cases} z = \sqrt{3}y + 1 \\ x^2 + 4y^2 + 4\sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ rayon $R = \sqrt{3}$, centre $(0, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2})$.

• $(C_{\sqrt{3}}) : \begin{cases} Z = -\dfrac{1}{2} \\ X^2 + (Y + \dfrac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3 \end{cases}$ dans le repère $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ associé à $\lambda = -\sqrt{3}$ et dans le repère fixe d' origine $(C_{\sqrt{3}}) : \begin{cases} z = -\sqrt{3}y + 1 \\ x^2 + 4y^2 - 4\sqrt{3}y = 0 \end{cases}$ rayon $R = \sqrt{3}$, centre $(0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2})$.

Quatrième exercice.

1°) Soit $a \in \mathbf{C}$, l' équation $z^2 = a$ admet deux solutions opposées si $a \neq 0$ et une solution double, $z = 0$, si $a = 0$.

Si on note $a = |a|e^{i\theta}$ $\theta \in \left]-\pi, \pi\right]$ les solutions de $z^2 = a$ sont $z = \pm\sqrt{|a|}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2°) Dans $M_2(\mathbf{C})$, toute matrice est semblable à une matrice triangulaire car le polynome caractéristique est systématiquement scindé. A est donc semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

La trace et le déterminant de deux matrices semblables étant les mêmes, on a, si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = tr(A) = a + d \\ \alpha\beta = \det(A) = ad - bc \end{cases}$$

On en déduit $(A - \alpha Id)(A - \beta Id) = A^2 - (\alpha + \beta)A + \alpha\beta Id = A^2 - (a+d)A + (ad - bc)Id$

soit $\begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a+d) \\ b(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix} - (a+d)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3°) <u>On suppose</u> A <u>diagonalisable.</u> Cela veut dire que A est semblable à une matrice diagonale. Autrement dit $\exists P$ inversible telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ avec les éventualités suivantes:

- $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$ cas où A est inversible, avec deux valeurs propres distinctes.
- $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ cas où A n' est pas inversible et $A \neq O$.
- $\alpha = \beta$ cas où $A = \alpha Id$.

4°) <u>On suppose</u> A <u>non diagonalisable.</u>

- A admettant toujours des valeurs propres dans $\mathbf{C}$, si A avait deux valeurs propres distinctes elle serait diagonalisable. Donc A admet une valeur double α.
- Il existe $u \in \mathbf{C}^2$ tel que $(A - \alpha Id)(u) \neq 0$, sinon, on aurait : $\forall u \in \mathbf{C}^2$, $(A - \alpha Id)(u) = 0$ ce qui voudrait dire que $A = \alpha Id$, et alors A serait diagonalisable.
- Soit donc $u \in \mathbf{C}^2$ tel que $(A - \alpha Id)(u) \neq 0$, et posons $v = (A - \alpha Id)(u)$. Montrons que (u, v) est une famille libre, ce qui assurera que c' est une base de $\mathbf{C}^2$.
  Soient $a, b \in \mathbf{C}$ tels que $au + bv = 0$. On a donc $au + b(A - \alpha Id)(u) = 0$. Appliquons alors $(A - \alpha Id)$ à cette égalité, on obtient : $a(A - \alpha Id)(u) + b(A - \alpha Id)^2(u) = 0$ soit, puisque $(A - \alpha Id)^2 = O$, $a(A - \alpha Id)(u) = 0$, donc $a = 0$ et par suite $b = 0$.

- Mais alors dans la base (u, v), l' endomorphisme f de matrice A relativement à la base canonique de $\mathbf{C}^2$ aura pour matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, et on aura donc $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v). En effet:
  $f(u)"="A(u) = (A - \alpha Id)(u) + \alpha u = \alpha u + v$ et
  $f(v)"="A(v) = A(A - \alpha Id)(u) = (A - \alpha Id)^2(u) + \alpha(A - \alpha Id)(u) = 0 + \alpha v = \alpha v$.

5°) Soit l'équation $Z^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$.

Une matrice Z solution doit commuter avec A puisque $AZ = ZA = Z^3$. Notons $Z = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$ZA = \begin{pmatrix} a\alpha & c\beta \\ b\alpha & d\beta \end{pmatrix}$, $AZ = \begin{pmatrix} a\alpha & c\alpha \\ b\beta & d\beta \end{pmatrix}$ $AZ = ZA \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ et donc $Z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

L'équation $Z^2 = A$ s'écrit $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et il y a donc <u>quatre solutions</u> à l'équation.

<u>**conclusion**</u> $Z = \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{|\alpha|}\, e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & \varepsilon'\sqrt{|\beta|}\, e^{i\frac{\theta'}{2}} \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$, $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$, $\beta = |\beta| e^{i\theta'}$.

6°) Soit l'équation $Z^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$.

Là encore une matrice Z solution doit commuter avec A.

$ZA = \begin{pmatrix} a\alpha & 0 \\ b\alpha & 0 \end{pmatrix}$, $AZ = \begin{pmatrix} a\alpha & c\alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $AZ = ZA \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \end{cases}$ et donc $Z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

L'équation $Z^2 = A$ s'écrit $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et il y a donc <u>deux solutions</u> à l'équation.

<u>**conclusion**</u> $Z = \begin{pmatrix} \varepsilon\sqrt{|\alpha|}\, e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$.

7°) Soit l'équation $Z^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{C}$.

- Cas $\alpha = 0$. Alors les matrices $Z = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $a \in \mathbf{C}$ vérifient $Z^2 = O$, il y a donc <u>une infinité</u> de solutions.

- Cas $\alpha \neq 0$. Soit f un endomorphisme involutif, c'est à dire tel que $f^2 = Id$. Il en existe une infinité. En effet, si E_1 et E_2 sont deux sous espaces de $\mathbf{C}^2$ de dimension 1 tels que $\mathbf{C}^2 = E_1 \oplus E_2$, l'endomorphisme f défini par $f(u) = u_1 - u_2$, $u = u_1 + u_2$, $u_i \in E_i$ est involutif.

  Dès lors l'endomorphisme $g = \sqrt{|\alpha|}\, e^{i\frac{\theta}{2}} f$ vérifie $g^2 = \alpha Id$ et sa matrice Z vérifiera $Z^2 = A$. On a donc <u>une infinité</u> de solutions encore dans ce cas.

8°) Soit l'équation $Z^2 = A$, avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{C}$.

Là encore une matrice Z solution doit commuter avec A .

$ZA = \begin{pmatrix} a\alpha + c & c\alpha \\ b\alpha + d & d\alpha \end{pmatrix}$, $AZ = \begin{pmatrix} a\alpha & c\alpha \\ b\alpha + a & d\alpha + c \end{pmatrix}$ $AZ = ZA \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases}$ et donc

$Z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. L'équation $Z^2 = A$ s'écrit $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

- Cas $\alpha = 0$. Alors il n'y a pas de solution.
- Cas $\alpha \neq 0$. Alors il y a deux solutions

$$Z = \varepsilon \begin{pmatrix} \sqrt{|\alpha|}\, e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{|\alpha|}} e^{-i\frac{\theta}{2}} & \sqrt{|\alpha|}\, e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix} , \ \varepsilon = \pm 1 \ , \ \alpha = |\alpha| e^{i\theta} .$$

9°) Soit $A \in M_2(\mathbf{C})$ et l'équation $Z^2 = A$.

Soit h l'endomorphisme de matrice A relativement à la base canonique de $\mathbf{C}^2$ et f l'endomorphisme de matrice Z relativement à cette même base.

Le problème est donc de chercher les f tels que $f^2 = g$.

- Si A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$, on est dans le cas de la question 5)

  Il y a quatre solutions.

- Si A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$, on est dans le cas de la question 6)

  Il y a deux solutions.

- Si A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{C}$, on est dans le cas de la question 7)

  Il y a une infinité de solutions.

- Si A est semblable à $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbf{C}$, on est dans le cas de la question 8)

  $\begin{cases} \alpha = 0 & \text{pas de solution} \\ \alpha \neq 0 & \text{deux solutions} \end{cases}$

FIN.