Épreuve 1B du concours PT de 2002

Préliminaires

1. c.f. cours.

2. (a) La première famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2, x \mapsto x^3)$ est libre (c.f. cours sur les polynômes); les polynômes correspondant à ces fonctions polynômiales forment la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

   (b) La seconde famille $(c_1 : x \mapsto 1, c_2 : x \mapsto \cos(x), c_3 : x \mapsto \cos(2x), c_4 : x \mapsto \cos^2(x))$ n'est pas libre.

   En effet, la relation trigonométrique classique $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ montre que c_3 est combinaison linéaire de c_1 et de c_4 : $c_3 = 2.c_4 - c_1$.

   (c) Montrons que la troisième famille $(f_1 : x \mapsto 1, f_2 : x \mapsto x^3 + 1, f_3 : x \mapsto |x^3|)$ est libre :

   $\square$ Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha.f_1 + \beta.f_2 + \gamma.f_3 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$.

   Alors pour tout réel x, $\alpha + \beta(x^3 + 1) + \gamma|x^3| = 0$. Ce qui donne, avec $x = 0$, $x = 1$ et $x = -1$ le système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

   Le déterminant de ce système vaut $2 \neq 0$, donc le système est de Cramer et sa seule solution est la solution $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, d'où le résultat. $\square$

3. La première et la troisième famille étant libre, elles engendrent des sous-espaces vectoriels de dimension leur cardinal, c'est à dire respectivement 4 et 3.

   La deuxième famille étant liée, elle engendre un sous-espace vectoriel de dimension au plus 3. Montrons que la famille (c_1, c_2, c_3) est libre, ce qui nous permettra d'affirmer que la dimension du sous-espace engendré par (c_1, c_2, c_3, c_4) est supérieure à 3, donc égale à 3.

   $\square$ Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha.c_1 + \beta.c_2 + \gamma.c_3 = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R})}$.

   Alors pour tout réel x, $\alpha + \beta\cos(x) + \gamma\cos(2x) = 0$. Ce qui donne, avec $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ le système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\beta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

   Le déterminant de ce système vaut $-\sqrt{2} + 1 \neq 0$, donc le système est de Cramer et sa seule solution est la solution $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, d'où le résultat. $\square$

Partie I

1. Montrons que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([-1, 1])$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^2$ de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

   Remarquons que $0_{\mathcal{C}^2([-1,1])} \in \mathcal{G}$, donc $\mathcal{G} \neq \emptyset$.

   $\square$ Soient $f, g \in \mathcal{G}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: $f, g \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$ et il existe $P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ tels que

(i) $\forall x \in [-1,0[$, $f(x) = P_1(x)$ et $g(x) = Q_1(x)$;

(ii) $\forall x \in]0,1]$, $f(x) = P_2(x)$ et $g(x) = Q_2(x)$.

$\mathcal{C}^2([-1,1])$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, donc $\alpha.f + \beta.g \in \mathcal{C}^2([-1,1])$.

$\alpha.P_1 + \beta.Q_1 \in \mathbb{R}_3[X]$ et pour tout $x \in [-1,0[$, $(\alpha.f+\beta.g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha P_1(x) + \beta Q_1(x) = (\alpha.P_1 + \beta.Q_1)(x)$.

De même, $\alpha.P_2 + \beta.Q_2 \in \mathbb{R}_3[X]$ et pour tout $x \in]0,1]$, $(\alpha.f+\beta.g)(x) = (\alpha.P_1 + \beta.Q_1)(x)$.

Ceci montre que $\alpha.f + \beta.g \in \mathcal{G}$. $\square$

2. • Commençons par supposer que $f \in \mathcal{G}$: f est alors de classe ^{2} sur $[-1,1]$.

   (i) La continuité en 0 de f implique $\lim_{x\to 0^-}(f(x)) = \lim_{x\to 0^+}(f(x))$, d'où $\delta_1 = \delta_2$.

   (ii) $\forall x \in [-1,0[$, $f'(x) = 3\alpha_1 x^2 + 2\beta_1 x + \gamma_1$ et $\forall x \in]0,1]$, $f'(x) = 3\alpha_2 x^2 + 2\beta_2 x + \gamma_2$.
   Par suite, la continuité en 0 de f' (car f est $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$) implique $\gamma_1 = \gamma_2$.

   (iii) Un même argument sur la continuité de f'' en 0 donne $\beta_1 = \beta_2$.

   Il en résulte qu'une condition nécessaire de l'appartenance de f à $\mathcal{G}$ est :

$$\beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 \quad \text{et} \quad \delta_1 = \delta_2.$$

   • Montrons que cette condition est suffisante. Supposons donc $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ et $\delta_1 = \delta_2$.
   D'après la définition de f, pour qu'elle appartienne à $\mathcal{G}$, il suffit de vérifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$. De plus, comme f est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,0[$ et sur $]0,1]$, il suffit de s'intéresser à la régularité de f en 0.

   (i) Par définition, $f(0) = \delta_2$, f est continue à droite en 0 et comme $\lim_{x\to 0^-}(f(x)) = \delta_1 = \delta_2 = f(0)$, f est continue en 0.

   (ii) En calculant $T(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, nous obtenons que $\lim_{x\to 0^-} T(x) = \gamma_1 = \gamma_2 = \lim_{x\to 0^+} T(x)$,
   soit la dérivabilité de f en 0, avec $f'(0) = \gamma_2$.
   Il ne reste plus qu'à vérifier, en utilisant les valeurs connues de $f'(x)$ si $x \neq 0$, que f' est bien continue en 0.

   (iii) Un raisonnement similaire (à partir de f') démontre que f est deux fois dérivable en 0, que $f''(0) = 2\beta_2$, puis que f'' est continue en O.

   Finalement, ($\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ et $\delta_1 = \delta_2$) est une condition nécessaire et suffisante pour que f appartienne à $\mathcal{G}$.

3. (i) Montrons la liberté de la famille $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$:
   $\square$ Soient α_0, α_1, α_2, α_3 et α_4 des réels tels que (*) $\alpha_0.f_0 + \alpha_1.f_1 + \alpha_2.f_2 + \alpha_3.f_3 + \alpha_4.f_4 = 0_{\mathcal{G}}$.
   Alors pour tout $x \in [-1,0[$, $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = 0$, et un polynôme ayant une infinité de racines étant nul, il en résulte que $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ et $\alpha_3 = 0$.
   Et la relation (*) appliquée en $x = 1$ donne alors $\alpha_4 = 0$. $\square$

   (ii) Montrons maintenant que $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ engendre $\mathcal{G}$:
   $\square$ Soit $f \in \mathcal{G}$: $f \in \mathcal{C}^2([-1,1])$ et d'après la question précédente, il existe des réels α_1, α_2, β, γ et δ tels que

$$f : x \mapsto \begin{cases} \alpha_1 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta & \text{si } x < 0 \\ \alpha_2 x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   En vérifiant que $\forall x \in [-1,1]$ (faire les 2 cas $x < 0$ et $x \geq 0$) $f(x) = \delta f_0(x) + \gamma f_1(x) + \beta f_2(x) + \alpha_1 f_3(x) + (\alpha_2 - \alpha_1) f_4(x)$, nous obtenons que

$$f = \delta.f_0 + \gamma.f_1 + \beta.f_2 + \alpha_1 f_3 + (\alpha_2 - \alpha_1).f_4,$$

   d'où le résultat. $\square$

Nous venons d'établir que la famille $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de $\mathcal{G}$ qui est donc de dimension 5.

Partie II

1. Un raisonnement similaire à celui utilisé pour montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([-1,1])$ permet de montrer que S_{σ_n} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2([-1,1])$, donc un espace vectoriel. La seule différence est le nombre de sous-intervalles à considérer : n au lieu de 2.

2. Nous avons $\sigma_1 = (x_0, x_1)$, donc $f \in S_{\sigma_1}$ signifie $f \in \mathcal{C}^2([x_0,x_1])$ et $f_{|]x_0,x_1[}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

   Dès lors, il est immédiat que S_{σ_1} est de dimension 4, les applications (de $[x_0,x_1]$ dans $\mathbb{R}$) $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto x$, $f_2 : x \mapsto x^2$ et $f_3 : x \mapsto x^3$ définissant une base de S_{σ_1}.

3. (a) Comme $f \in S_{\sigma_{n+1}}$, il est facile de vérifier que la restriction $f_{|[x_0,x_n]}$ appartient à S_{σ_n} (f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_0,x_{n+1}]$ donc $f_{|[x_0,x_n]}$ l'est aussi sur $[x_0,x_n]$, et si $i \in \{0,\ldots,n-1\}$, la restriction de $f_{|[x_0,x_n]}$ à $]x_i,x_{i+1}[$ est égale à $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$).
   Par suite, comme $(f_1,\ldots,f_d)$ est une base de S_{σ_n}, il existe un unique d-uplet de réels $(a_1,\ldots,a_d)$ tel que
   $$f_{|[x_0,x_n]} = \sum_{i=1}^{d} a_i.f_i,$$
   c'est à dire tel que
   $$\forall x \in [x_0,x_n], \quad f(x) = \sum_{i=1}^{d} a_i f_i(x).$$

   (b) $F = f - \sum\limits_{i=1}^{d} a_i.\tilde{f}_i$.

   D'une part, $\forall x \in [x_n,x_{n+1}]$, $F(x) = t(x) - \sum\limits_{i=1}^{d} a_i p_i(x)$, où t est le polynôme de degré inférieur ou égal à 3 tel que $f_{|]x_n,x_{n+1}[} = t$ (en prolongeant par continuité l'égalité en x_n et x_{n+1}). Ceci prouve que sur $[x_n,x_{n+1}]$, F est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.

   D'autre part, remarquons que sur $]x_{n-1},x_{n+1}[$, $F(x) = f(x) - \sum\limits_{i=1}^{d} a_i p_i(x)$, donc F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[x_{n-1},x_{n+1}]$.
   Et sur $]x_{n-1},x_n[$, par définition des p_i et a_i, $F(x) = 0$, donc également $F'(x) = 0$ et $F''(x) = 0$.
   Les continuités à gauche en x_n de F, F' et F'' montrent alors que $F(x_n) = F'(x_n) = F''(x_n) = 0$.

   (c) $F_{|[x_n,x_{n+1}]}$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 dont x_n est racine d'ordre de multiplicité au moins égal à 3. Par suite, sur $[x_n,x_{n+1}]$, F est nécessairement de la forme $\alpha(x-x_n)^3$.
   Comme $F(x) = 0$ pour tout $x \in [x_0,x_n[$, nous avons
   $$F = \alpha.\tilde{f}_{d+1},$$
   d'où finalement, avec $a_{d+1} = \alpha$,
   $$f = \sum_{i=1}^{d} a_i.\tilde{f}_i.$$
   Il en résulte que $\tilde{f}_0,\ldots,\tilde{f}_{d+1}$ engendre $S_{\sigma_{n+1}}$, donc que $\dim(S_{\sigma_{n+1}}) \leq d+1$ (1).
   Mais, quitte à prolonger les f_i en $\tilde{f}_i$, nous pouvons considérer que S_{σ_n} est un sous-espace vectoriel de $S_{\sigma_{n+1}}$, strict car $\tilde{f}_{d+1}$ ne correspond alors pas à un prolongement d'une fonction de S_{σ_n}. Il en résulte que $\dim(S_{\sigma_{n+1}}) > d$ (2).

Finalement, (1) et (2) établissent que $\dim(S_{\sigma_{n+1}}) = d+1$, et donc que la famille génératrice $\tilde{f_0}, \ldots, \tilde{f_{d+1}}$ est une base de $S_{\sigma_{n+1}}$.
Remarque : il est bien sûr tout à fait possible de démontrer "directement" la liberté de la famille.

(d) L'étude précédente montre que pour tout entier $n \geq 1$, si S_{σ_n} est un espace vectoriel de dimension finie, $S_{\sigma_{n+1}}$ est également de dimension finie et $\dim(S_{\sigma_{n+1}}) = \dim(S_{\sigma_n}) + 1$.
Une récurrence immédiate sur l'entier $n \geq 1$, utilisant le fait que S_{σ_1} est de dimension finie égale à 4, montre que pour tout $n \geq 1$, S_{σ_n} est de dimension finie égale à $n+3$.

4. (a) En notant le polynôme p de degré inférieur ou égal à 3 par

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

nous voyons que le problème posé est équivalent à l'existence et l'unicité d'une solution du système linéaire (obtenu en calculant les dérivées successives de p puis en les calculant en a et b)

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & ba_1 & + & b^2a_2 & + & b^3a_3 & = & \delta \\ a_0 & + & aa_1 & + & a^2a_2 & + & a^3a_3 & = & \alpha \\ & & a_1 & + & 2aa_2 & + & 3a^2a_3 & = & \beta \\ & & & & 2a_2 & + & 6aa_3 & = & \gamma \end{array}\right.$$

soit

$$A \times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6a \end{pmatrix}.$$

Calculons $\Delta = \det(A)$:

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 \\ 0 & a-b & a^2-b^2 & a^3-b^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6a \end{vmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
&= \begin{vmatrix} a-b & a^2-b^2 & a^3-b^3 \\ 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 2 & 6a \end{vmatrix} && (\text{développement suivant la } 1^{\text{ère}} \text{ colonne}) \\
&= (a-b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2+ab+b^2 \\ 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 2 & 6a \end{vmatrix} && (\text{linéarité de la } 1^{\text{ère}} \text{ ligne}) \\
&= (a-b)\begin{vmatrix} 1 & a+b & a^2+2ab+b^2 \\ 0 & a-b & 2a^2-ab-b^2 \\ 0 & 2 & 6a \end{vmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
&= (a-b)\begin{vmatrix} a-b & 2a^2-ab-b^2 \\ 2 & 6a \end{vmatrix} && (\text{développement suivant la } 1^{\text{ère}} \text{ colonne}) \\
&= (a-b)[(a-b)6a - 2(2a^2-ab-b^2)] && = (a-b)(2a^2-4ab+2b^2)
\end{aligned}$$

Par suite, $\Delta = 2(a-b)^3 \neq 0$.
Le système possède donc une unique solution, d'où l'existence et l'unicité du polynôme p recherché.

(b) Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que pour tout $(n+3)$-uplet de réels $(y_0, \ldots, y_n, \alpha, \beta)$, il existe une unique fonction spline $f \in S_{\sigma_n}$ telle que

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \quad \begin{aligned} f(x_i) &= y_i, \\ f'(x_0 &= \alpha, \\ f''(x_0) &= \beta. \end{aligned}$$

- $n = 1$: soit $(y_0, y_1, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4$.
  D'après la question précédente, il existe un unique polynôme f de degré inférieur ou égal à 3 tel que $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, $f'(x_0) = \alpha$ et $f''(x_0) = \beta$, ce qui répond exactement à la question.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété vraie jusqu'à n. Soient $(y_0, \ldots, y_{n+1}, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n+4}$.
  Par hypothèse de récurrence, il existe une unique fonction $f \in S_{\sigma_n}$ telle que

  $$f(x_0) = y_0, \ldots, f(x_n) = y_n, f'(x_0) = \alpha \text{ et } f''(x_0) = \beta.$$

  Dès lors, une fonction $\tilde{f} \in S_{\sigma_{n+1}}$ vérifiant les conditions recherchées est du type :

  $$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [x_0, x_n] \\ \\ p(x) & \text{si } x \in]x_n, x_{n+1}] \quad \text{avec } p \in \mathbb{R}_3[X] \quad \text{et } \begin{cases} p(x_n) = y_n \\ p'(x_n) = f'(x_n) \\ p''(x_n) = f''(x_n) \\ p(x_{n+1}) = y_{n+1}. \end{cases} \\ \end{cases}$$

  Par suite, l'existence et l'unicité de $\tilde{f}$ est équivalente à celle du polynôme p, et donc résulte cette fois encore de la question 4a.

(c) Montrons que $S^0_{\sigma_n}$ est un sous-espace vectoriel de S_{σ_n}.
$0_{S_{\sigma_n}} = 0_{\mathcal{C}^2([x_0,x_n])} \in S^0_{\sigma_n}$ donc $S^0_{\sigma_n} \neq \emptyset$.
$\square$ Soient $f, g \in S^0_{\sigma_n}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Comme S_{σ_n} est un espace vectoriel, $\alpha.f + \beta.g \in S_{\sigma_n}$. De plus, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $(\alpha.f + \beta.g)(x_i) = \alpha f(x_i) + \beta g(x_i) = 0$. Donc $\alpha.f + \beta.g \in S^0_{\sigma_n}$. $\square$
Choisissons les fonctions f_1 et f_2 de $S^0_{\sigma_n}$ comme les seules fonctions de S_{σ_n} telles que

$$\begin{aligned} &\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \quad f_1(x_i) = 0, \quad {f_1}'(x_0) = 1 \quad \text{et} \quad {f_1}''(x_0) = 0; \\ &\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \quad f_2(x_i) = 0, \quad {f_2}'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad {f_2}''(x_0) = 1. \end{aligned}$$

$\square$ Soient α et β des réels tels que $h = \alpha.f_1 + \beta.f_2 = 0_{S^0_{\sigma_n}}$.
Alors $h'(x_0) = 0 = \alpha$ et $h''(x_0) = 0 = \beta$. $\square$ Ce qui prouve que la famille (f_1, f_2) est libre.
$\square$ Soit $h \in S^0_{\sigma_n}$. Posons $\alpha = h'(x_0)$ et $\beta = h''(x_0)$. Remarquons alors que $\alpha.f_1 + \beta.f_2$ et h appartiennent à S_{σ_n} et que

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \quad (\alpha.f_1 + \beta.f_2)(x_i) = 0 = h(x_i),$$

$$(\alpha.f_1 + \beta.f_2)'(x_0) = h'(x_0) \quad \text{et} \quad (\alpha.f_1 + \beta.f_2)''(x_0) = h''(x_0).$$

L'unicité démontrée à la question 4b implique que $h = \alpha.f_1 + \beta.f_2$. $\square$ Ce qui prouve que (f_1, f_2) engendre $S^0_{\sigma_n}$.
Finalement, (f_1, f_2) est une base de $S^0_{\sigma_n}$, et par suite, $\dim(S^0_{\sigma_n}) = 2$.

5. (a) Sur $]x_i, x_{i+1}[$, $f = p_i$, où p_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
Il en résulte que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle, et que pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$, $f^{(4)}(x) = {p_i}^{(4)}(x) = 0$.

(b) Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]x_i, x_{i+1}[$, $(f'')^2 = (f'f'')' - f'f'''$ d'où

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [(f'f'')'(x) - f'(x)f'''(x)] \, \mathrm{d}x,$$

d'où, par intégration par parties,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x = [f'(x)f''(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} - [f(x)f'''(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)f^{(4)}(x) \, \mathrm{d}x,$$

soit, comme $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$ et comme $f^{(4)} = 0$ sur $]x_i, x_{i+1}[$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x = [f'(x)f''(x)]_{x_i}^{x_{i+1}} = f'(x_{i+1})f''(x_{i+1}) - f'(x_i)f''(x_i).$$

Et comme

$$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n-1} (f'(x_{i+1})f''(x_{i+1}) - f'(x_i)f''(x_i)),$$

nous en déduisons

$$\int_{x_0}^{x_n} (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x = f'(x_n)f''(x_n) - f'(x_0)f''(x_0).$$

(c) Laissons le soin au lecteur de vérifier que l'application Φ est linéaire. Montrons alors que Φ est injective :
$\square$ Soit $\varphi \in \ker(\Phi)$. C'est à dire $\varphi \in S^0_{\sigma_n}$ telle que $\Phi(\varphi) = (0, 0)$.
Cela signifie que $\varphi'(x_0 = \varphi'(x_n) = 0$. D'après 5b,

$$\int_{x_0}^{x_n} (\varphi''(x))^2 \, \mathrm{d}x = \varphi'(x_n)\varphi''(x_n) - \varphi'(x_0)\varphi''(x_0) = 0.$$

Or l'application $x \mapsto (\varphi''(x))^2$ est continue et positive sur $[x_0, x_n]$,
donc $\forall x \in [x_0, x_n]$, $\varphi''(x) = 0$. φ' est constante sur $[x_0, x_n]$ et comme $\varphi'(x_0) = 0$, $\forall x \in [x_0, x_n]$, $\varphi'(x) = 0$. φ est donc constante sur $[x_0, x_n]$, et comme $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi = 0$. $\square$
Φ est une injection de $S^0_{\sigma_n}$ dans $\mathbb{R}^2$. D'après 4c, $\dim(S^0_{\sigma_n}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc Φ est une bijection de $S^0_{\sigma_n}$ sur $\mathbb{R}^2$.

(d) (i) Démontrons d'abord l'unicité d'une telle fonction spline :
$\square$ Soient f et g deux fonctions splines de S_{σ_n} vérifiant les conditions de l'énoncé.
Il est immédiat que $f - g \in S^0_{\sigma_n}$ et de plus, $(f - g)'(x_0) = 0$ et $(f - g)'(x_n) = 0$. Donc $f - g \in \ker(\Phi)$. 5c montre qu'alors $f - g = 0_{S^0_{\sigma_n}}$ d'où $f = g$. $\square$

(ii) Établissons maintenant l'existence de la fonction spline f.

- Notons g l'unique fonction de S_{σ_n} (c.f. 4b) telle que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, g(x_i) = y_i, \text{ et } g'(x_0) = 0 = g''(x_0).$$

- Notons h l'unique antécédent de $(\alpha, \beta - g'(x_n))$ par Φ : $h \in S^0_{\sigma_n} \subset S_{\sigma_n}$ et $h'(x_0) = \alpha$, $h'(x_n) = \beta - g'(x_n)$.

Posons $f = h + g$: $f \in S_{\sigma_n}$ (car S_{σ_n} est un espace vectoriel) et f vérifie bien les $n + 3$ conditions recherchées.

Partie III

1. (a) Par construction, g est 2-périodique, continue (car $f(0) = f(1) = 0$) et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc le théorème de Dirichlet assure la convergence, pour tout réel x, de la série de Fourier de g en x vers $g(x)$.

De plus, g est impaire, donc les seuls coefficients de Fourier non nuls de g sont ceux "en sinus". En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \int_{-1}^{1} g(t)\sin(\pi n t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^1 g(t)\sin(\pi n t)\ \mathrm{d}t$, nous obtenons :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \sin(\pi n x).$$

(b) Remarquons que g est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

Comme g, g'' est impaire. Sa série de Fourier est donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S(g'')(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(\pi n x),$$

où pour $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = c_n = 2\int_0^1 g''(t)\sin(\pi n t)\ \mathrm{d}t$.

Comme g'' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, ni de classe $\mathcal{C}^1$, g'' n'a a priori aucune raison d'être égale à sa série de Fourier.

(c) Par contre, la formule de Bessel-Parseval s'applique pour g'' et donne :

$$\int_0^1 (g''(x))^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (g''(x))^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} {d_n}^2. \tag{1}$$

Et une double intégration par parties permet de calculer d_n en fonction de c_n (en utilisant $g(0) = g(1) = 0$) :

$$\begin{array}{rcl} d_n & = & 2\int_0^1 g''(t)\sin(\pi n t)\ \mathrm{d}t \\ & = & 2([g'(t)\sin(\pi n t)]_0^1 - n\pi\int_0^1 g'(t)\cos(\pi n t)\ \mathrm{d}t) \\ & = & -2n\pi([g(t)\cos(\pi n t)]_0^1 + n\pi\int_0^1 g(t)\sin(\pi n t)\ \mathrm{d}t) \\ & = & -(n\pi)^2 c_n \end{array}$$

Et, comme $\forall x \in]0,1[, g(x) = f(x)$, nous avons également $\forall x \in]0,1[, g''(x) = f''(x)$, donc l'équation (1) donne

$$\int_0^1 (f''(x))^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\pi^4 {c_n}^2 = \frac{\pi^4}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} {c_n}^2 n^4. \tag{2}$$

(d) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, appliquée aux vecteurs $(a_1, \dots, a_N)$ et $(b_1, \dots, b_N)$ de $\mathbb{R}^N$, muni du produit scalaire canonique :

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} {a_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} {b_n}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Les deux séries de droite convergeant par hypothèse, nous obtenons que la suite de terme général $\sum_{n=1}^{N} |a_n b_n|$ est croissante et majorée :

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n b_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} {a_n}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} {b_n}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où la convergence absolue de la série $\sum a_n b_n$, et la majoration recherchée.

(e) Les deux séries à termes réels $\sum (c_n n^2)^2$ (par Bessel-Parseval sur g'') et $\sum \left(\frac{1}{n^2}\right)^2$ convergent. D'après 1d, il en résulte que la série $\sum(c_n n^2 \times \frac{1}{n^2})$ converge absolument et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} {c_n}^2 n^4\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci prouve, comme $\forall x \in [0,1]$, $|c_n \sin(\pi n x)| \leq |c_n|$, la convergence absolue de la série de Fourier de f vers $f(x)$ et, à l'aide de l'équation (2), nous obtenons :

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi^2} \left(\int_0^1 (f''(x))^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

soit

$$\forall x \in [0,1], \quad |f(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{5}} \parallel f \parallel . \tag{3}$$

2. (a) $g_i : t \mapsto (f - \varphi)(x_i + t h_i)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ (car f, φ, ainsi que l'application de $[0,1]$ dans $[0,1]$, $t \mapsto (x_i + t h_i)$ le sont). Et le théorème de dérivation des fonctions composées montre que $\forall t \in [0,1]$, ${g_i}''(t) = {h_i}^2 (f - \varphi)''(x_i + t h_i)$. D'où

$$\begin{array}{rcl} \parallel g_i \parallel^2 & = & \int_0^1 {h_i}^4 [(f-\varphi)''(x_i + t h_i)]^2 \, \mathrm{d}t \\ & = & {h_i}^4 \int_{x_i}^{x_{i+1}} [(f-\varphi)''(u)]^2 \frac{1}{h_i} \, \mathrm{d}u \quad (\text{ chgt de variable } u = x_i + t h_i) \\ & \leq & {h_i}^3 \parallel f - \varphi \parallel^2. \end{array}$$

L'équation (3) s'applique bien à g_i et donne

$$\forall t \in [0,1], \quad |g_i(x)| \leq \frac{1}{3\sqrt{5}} \parallel g_i \parallel \leq {h_i}^{\frac{3}{2}} \frac{\parallel f - \varphi \parallel}{3\sqrt{5}},$$

soit, en passant au sup,

$$\sup_{t \in [0,1]} |g_i(t)| \leq \left({h_i}^{\frac{3}{2}}\right) \frac{\parallel f - \varphi \parallel}{3\sqrt{5}}.$$

Enfin, il suffit de remarquer que $\sup\limits_{t \in [0,1]} |g_i(t)| = \sup\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} |f(x) - \varphi(x)|$ pour conclure.

(b) Calculons, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, à l'aide d'intégrations par parties successives (possibles car φ est une fonction spline, donc peut être considérée comme de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$) :

$$\begin{array}{l} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(t) - \varphi''(t)) \varphi''(t) \, \mathrm{d}t \\ \quad = [(f'(t) - \varphi'(t)\varphi''(t)]_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(t) - \varphi'(t))\varphi'''(t) \, \mathrm{d}t \\ \quad = (f'(x_{i+1}) - \varphi'(x_{i+1})\varphi''(x_{i+1}) - (f'(x_i) - \varphi'(x_i)\varphi''(x_i) \\ \qquad - \underbrace{[(f(t) - \varphi(t)\varphi'''(t)]_{x_i}^{x_{i+1}}}_{=0 \text{ car } \varphi(x_k) = f(x_k),\ \forall k} + \underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(t) - \varphi(t))\varphi^{(4)}(t) \, \mathrm{d}t}_{=0 \text{ car } \varphi^{(4)} = 0 \text{ sur }]0,1[} \\ \quad = (f'(x_{i+1}) - \varphi'(x_{i+1}))\varphi''(x_{i+1}) - (f'(x_i) - \varphi'(x_i))\varphi''(x_i) \end{array}$$

Calculons maintenant la norme de $f-\varphi$:

$$\begin{aligned}
&\| f-\varphi \|^2 \\
&\quad = \int_0^1 \left[(f-\varphi)''(t)\right]^2 \,\mathrm{d}t \\
&\quad = \int_0^1 \left[(f''(t))^2 - 2f''(t)\varphi''(t) + (\varphi''(t))^2\right] \mathrm{d}t \\
&\quad = \int_0^1 (f''(t))^2 \,\mathrm{d}t - 2\int_0^1 (f''(t)-\varphi''(t))\varphi''(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (\varphi''(t))^2\,\mathrm{d}t \\
&\quad = \| f \|^2 - \| \varphi \|^2 - 2\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(t)-\varphi''(t))\varphi''(t)\,\mathrm{d}t \\
&\quad = \| f \|^2 - \| \varphi \|^2 \\
&\qquad -2\sum_{i=0}^{n-1} \left[(f'(x_{i+1})-\varphi'(x_{i+1}))\varphi''(x_{i+1}) - (f'(x_i)-\varphi'(x_i))\,\varphi''(x_i)\right] \\
&\quad = \| f \|^2 - \| \varphi \|^2 \\
&\qquad -2\underbrace{\left[(f'(x_n)-\varphi'(x_n))\varphi''(x_n) - (f'(x_0)-\varphi'(x_0))\varphi''(x_0)\right]}_{=0 \text{ car } x_0=0,\ x_n=1 \text{ et } \varphi'(0)=f'(0),\ \varphi'(1)=f'(1)} \\
&\quad = \| f \|^2 - \| \varphi \|^2.
\end{aligned}$$

(c) L'égalité précedente donne immédiatement

$$\| f-\varphi \|^2 \leq \| f \|^2.$$

Et donc pour tout $i \in \{0,\dots,n-1\}$, la question 2a montre que

$$\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} |f(x)-\varphi(x)| \leq \left(h_i^{\frac{3}{2}}\right)\frac{\| f \|}{3\sqrt{5}} \leq \left(h^{\frac{3}{2}}\right)\frac{\| f \|}{3\sqrt{5}}. \tag{4}$$

□ Soit $x \in [0,1]$.
Comme σ est une subdivision de $[0,1]$, $\exists i \in \{0,\dots,n-1\}$ tel que $x \in [x_i, x_{i+1}]$, donc $|f(x)-\varphi(x)| \leq \sup\limits_{u\in[x_i,x_{i+1}]} |f(u)-\varphi(u)|$, d'où, d'après l'équation (4),

$$|f(x)-\varphi(x)| \leq \left(h^{\frac{3}{2}}\right)\frac{\| f \|}{3\sqrt{5}}.\square$$

Ce résultat étant valable $\forall x \in [0,1]$, nous avons démontré que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x)-\varphi(x)| \leq \left(h^{\frac{3}{2}}\right)\frac{\| f \|}{3\sqrt{5}}.$$