Durin Jean Pierre
6 Allée des Lauriers
71250 CLUNY.
Tél: 03.85.59.16.48.

Controle à postériori de l'épreuve

Banque PT: MATHS I-A.

Partie 1

Question 1.

a) Soit la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$. Pour $z=1$, la série est divergente sans être grossièrement divergente. 1 appartient donc au cercle de convergence. Donc $R=1$.
On aurait pu dire également qu'en $z=-1$, la série était convergente sans être absolument convergente et conclure de la même façon.
Bien sûr on pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert!

---

b) Déjà évoqué à la question précédente:
Divergence en $z=1$ (série harmonique $\frac{1}{n}$).
Convergence en $z=-1$ (série harmonique alternée $\frac{(-1)^n}{n}$ vérifiant le critère des séries alternées)

Question 2.

a) Soit x réel, tel que $|x|<1$. On note $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ somme de la série géométrique de raison x. Rayon de convergence $R=1$.

---

b) Comme $S(0)=0$, $S(x)=\int_0^x S'(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$.

Question 3.

- Soit la série de terme général $u_p = -\frac{1}{2}\frac{1}{3p+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{3p+2} + \frac{1}{3p+3}$.

$$u_p = \frac{-(3p+2)(3p+3)-(3p+1)(3p+3)+2(3p+1)(3p+2)}{2(3p+1)(3p+2)(3p+3)} = -\frac{9p+5}{2(3p+1)(3p+2)(3p+3)}$$

u_p est de signe constant négatif, $u_p \sim -\frac{1}{6p^2}$ quand $p \to +\infty$, le théorème sur les séries de signe constant équivalentes s'applique, u_p est équivalente à une série de type Riemann convergente, elle est elle même convergente.

- Soit la série de terme général $v_p = \frac{1}{3p+1} - \frac{1}{3p+2}$. $v_p = \frac{1}{(3p+1)(3p+2)}$ est de signe constant positif, $v_p \sim \frac{1}{9p^2}$. On conclut comme précédemment à la convergence de cette série.

- Soit $z = e^{2i\pi/3} = j$.

  On a : $j^{3p+1} = j$, $j^{3p+2} = j^2 = \overline{j}$, $j^{3p+3} = 1$ soit encore
  $$j^{3p+1} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ j^{3p+2} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \ , \ j^{3p+3} = 1.$$
  Considérons alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{j^n}{n}$. Comme le terme général tend vers 0 quand $n \to +\infty$, il est légitime de faire une sommation par paquets de trois termes consécutifs. On ne modifie pas la nature de la série, ni sa somme en cas de convergence.

  Soit donc $w_p = \frac{j^{3p+1}}{3p+1} + \frac{j^{3p+2}}{3p+2} + \frac{j^{3p+3}}{3p+3}$, $p \geq 0$.
  $$w_p = \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{3p+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{3p+2} + \frac{1}{3p+3}\right) + i\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{3p+1} - \frac{1}{3p+2}\right) = u_p + i\frac{\sqrt{3}}{2}v_p$$ avec les notations précédentes.

  La série de terme général w_p est donc convergente comme somme de deux séries convergentes.

  conclusion: la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ converge pour $z = e^{2i\pi/3}$.

Question 4.

a) Soit $\theta \in \mathbf{R}$; $e^{i\theta} \neq 1$ c'est à dire $\theta \neq 0 \ (2\pi)$.
$$\sum_{k=p}^{q} e^{ik\theta} = e^{ip\theta}(1 + e^{i\theta} + \ldots + e^{i(q-p)\theta}) = e^{ip\theta}\frac{1-e^{i(q-p+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$ expression que l'on transforme en passant aux arcs moitié : $$\sum_{k=p}^{q} e^{ik\theta} = e^{ip\theta}\frac{e^{i\frac{(q-p+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\frac{-2i\sin(\frac{q-p+1}{2})\theta}{-2i\sin\frac{\theta}{2}}.$$

conclusion: $$\sum_{k=p}^{q} e^{ik\theta} = e^{i\frac{p+q}{2}\theta}\frac{\sin(\frac{q-p+1}{2})\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

---

b) Pour $\theta \in \mathbf{R}$; $e^{i\theta} \neq 1$, θ fixé, alors $\sin\frac{\theta}{2} \neq 0$ et **conclusion:** $\left|\sum_{k=p}^{q} e^{ik\theta}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$.

---

c) Soit z un complexe tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Alors $\exists\theta \in \mathbf{R}$, $\theta \neq 0 \ (2\pi)$; $z = e^{i\theta}$.

- Posons $u_n = \dfrac{1}{n}$, u_n est le terme général d' une suite qui tend vers zéro telle que la série de terme général $\left|\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ est une série convergente.
- Posons $v_n = z^n$, on a bien que $\left|\sum_{k=p}^{q} v_k\right| \le M = \dfrac{1}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|}$.

Les hypothèses du théorème admis sont réunies, la série de terme général $\dfrac{z^n}{n}$ est convergente.

conclusion: la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n}$ converge pour $z = e^{i\theta}$, $\theta \neq 0 \ (2\pi)$.

Partie 2

$P = \{z \in \mathbf{C} \ ; \ \mathrm{Re(z)} > 0\}$ $\qquad F(z) = \ln(|z|) + iArg(z)$.

Question 1.

Pour $z \in P$, $\quad e^{F(z)} = e^{\ln(|z|)+iArg(z)} = |z|e^{iArg(z)} = z$.

Question 2.

Pour $z = x + iy \quad \begin{cases} x > 0 \\ y \in \mathbf{R} \end{cases}$ on note $P(x,y) = Re(F(z))$, $Q(x,y) = \mathrm{Im}(F(z))$.

a) $Q(x,y) = Arg(z) = Arc\tan(\dfrac{y}{x})$ car par définition $Arg(z) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $\dfrac{y}{x} = \tan(Arg(z))$.

conclusion: $Q(x,y) = Arc\tan(\dfrac{y}{x})$.

---

b) $P(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ d' où :

- $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\left[1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right]} = 0$.
- $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} + \left(-\dfrac{y}{x^2}\right)\dfrac{1}{\left[1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2\right]} = 0$.

conclusion: $\dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) - \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$.

---

c) • $\Delta P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$.

• $\Delta Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0$.

---

d) Le théorème de Green-Riemann dit, pour (γ) bord orienté d' un compact D ,(compact à gauche) que $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$ d' où ici:

• $\int_\gamma P(x,y)\,dx - Q(x,y)\,dy = \iint_D \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D 0\,dxdy = 0$.

• $\int_\gamma Q(x,y)\,dx + P(x,y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D 0\,dxdy = 0$.

Rq: On constate que l' orientation de (γ) n' a plus d' importance, puisque le résultat est nul.

Question 3.

a) Soit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \le 1$ et si $\rho = 1$, $\theta \ne 0 \ (2\pi)$.

Alors , $1 - z = (1 - \rho\cos\theta) - i\rho\sin\theta$.

$Re(1-z) = \begin{cases} 1 - \rho\cos\theta & \text{si } \rho < 1 \\ 1 - \cos\theta & \text{si } \rho = 1 \text{ mais alors avec } \cos\theta < 1 \end{cases}$ de sorte que $Re(1-z) > 0$ dans tous les cas et par suite :

conclusion: $1 - z \in P$ dès que z est différent de 1 et de module ≤ 1.

---

b) On admet, pour z ; $|z| \le 1$ et $z \ne 1$ que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = -F(1-z)$.

On a donc, en particulier pour $z = e^{i\theta}$ $\theta \in]0,2\pi[$:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{n} = -\left[\ln(|1-e^{i\theta}|) + iArg(1-e^{i\theta})\right]$ d' où

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = -Arg\left(e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i\sin\frac{\theta}{2})\right)$. Or $\frac{\theta}{2} \in]0,\pi[\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} > 0$ et par suite $e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i\sin\frac{\theta}{2})$ a pour module $2\sin\frac{\theta}{2}$ et pour argument possible $\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$ qui appartient bien à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

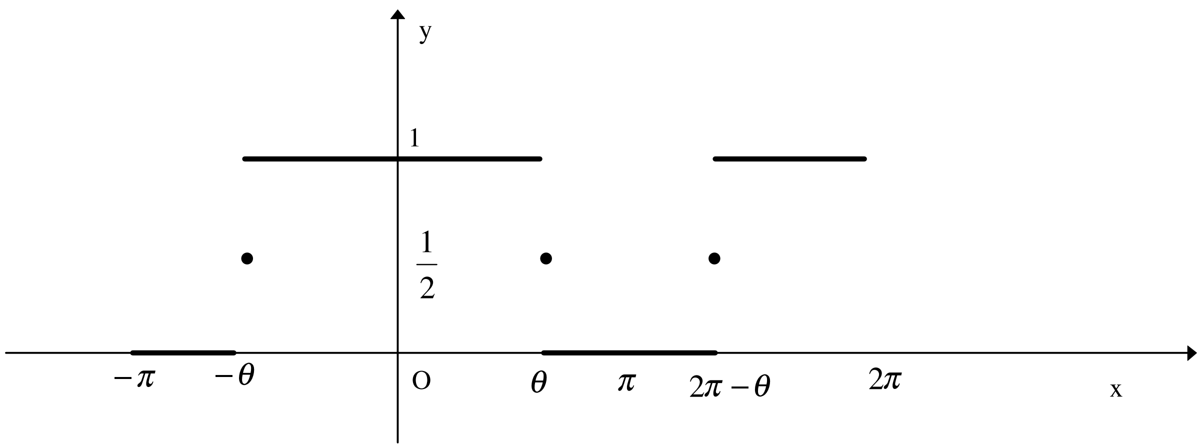
On a donc $Arg\left(e^{i\frac{\theta}{2}}(-2i\sin\frac{\theta}{2})\right) = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$.

conclusion: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = -(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi - \theta}{2}$ pour $\theta \in]0,2\pi[$.

Partie 3

Soit $\theta \in \left]0,\pi\right[$ fixé.

a) Soit f de période 2π, paire, définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x\in[0,\theta[\\ \dfrac{1}{2} \text{ si } x=\theta \\ 0 \text{ si } x\in\left]\theta,\pi\right] \end{cases}$



---

b) Coefficients de Fourier de f :

Les b_n sont nuls puisque f est paire.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\theta}\cos nx\,dx=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\sin n\theta}{n} \text{ pour } n\neq 0\\ \dfrac{2}{\pi}\theta \text{ pour } n=0\end{cases}.$$

conclusion: La série de Fourier de f est : $\dfrac{\theta}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n\theta}{n}\cos nx$.

---

c) La fonction f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$, donc vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet - Jordan. La série de Fourier de f converge en tout point et a pour somme $\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right)$. Or on a en tout point de $\mathbf{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\left(f(x^+)+f(x^-)\right)$ de sorte que

conclusion: $\forall x\in\mathbf{R},\ f(x)=\dfrac{\theta}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n\theta}{n}\cos nx$.

---

d) Pour $x=0$ on obtient : $1=\dfrac{\theta}{\pi}+\dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\sin n\theta}{n}$ soit :

conclusion: Pour $\theta \in \left]0,\pi\right[$ $\quad \dfrac{\pi-\theta}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n\theta}{n}$.

Maitenant, soit $\theta \in \left]\pi,2\pi\right[$. Alors $-\theta \in \left]-2\pi,-\pi\right[$ et $2\pi-\theta \in \left]0,\pi\right[$. On peut donc appliquer la formule précédente en remplaçant θ par $2\pi-\theta$, d' où :

pour $\theta \in \left]\pi,2\pi\right[$, $\dfrac{\pi-(2\pi-\theta)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n(2\pi-\theta)}{n}$ soit $\dfrac{\theta-\pi}{2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n\theta}{n}$ et finalement :

conclusion: pour $\theta \in \left]\pi,2\pi\right[$, $\dfrac{\pi-\theta}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n\theta}{n}$.

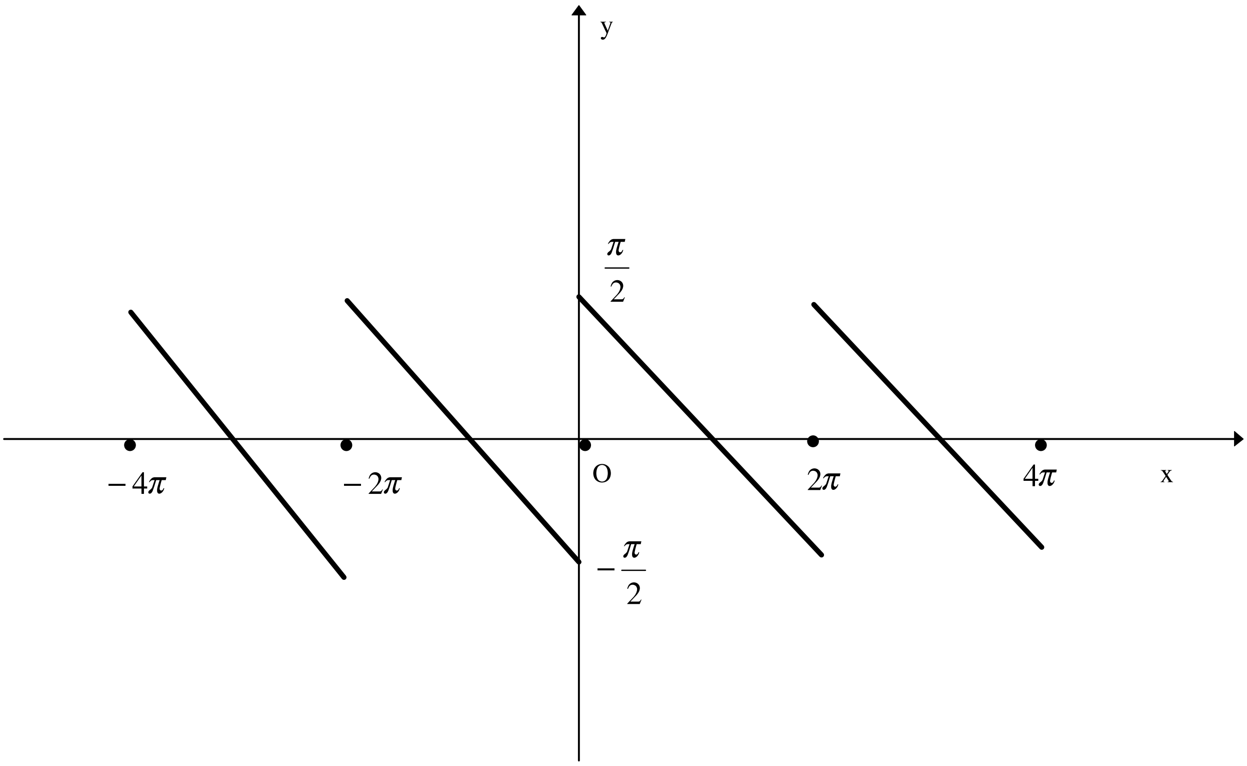
et puisque la formule est aussi vraie pour $\theta = \pi$, on a pour $\theta \in \left]0,2\pi\right[$, $\dfrac{\pi-\theta}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n\theta}{n}$.

Partie 4

Soit g de période 2π, telle que $g(0)=0$ et $g(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour $x \in \left]0,2\pi\right[$.

Question 1.

a)



b) Coefficients de Fourier de g :

Les a_n sont nuls puisque la fonction est impaire.

$b_n = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \dfrac{\pi - x}{2} \sin nx \, dx$ que l' on intègre par parties $\begin{cases} u = \pi - x & u' = -1 \\ v' = \sin nx & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{cases}$ d' où

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{\pi - x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = \frac{1}{n}.$$

conclusion: La série de Fourier de g est $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

Question 2.

a) La fonction g est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$, donc vérifie les hypothèses du théorème de Dirichlet - Jordan. La série de Fourier de g converge en tout point et a pour somme $\frac{1}{2}\left(g(x^+)+g(x^-)\right)$. Or on a en tout point de $\mathbf{R}$, $g(x)=\frac{1}{2}\left(g(x^+)+g(x^-)\right)$ de sorte que

conclusion: $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$.

Retenons en particulier que $\forall x \in \left]0,2\pi\right[$, $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}$ et on retrouve le résultat de la partie3.

---

b) • Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a : $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}$. Or $\sin\frac{2p\pi}{2} = 0$ et $\sin\frac{(2p+1)\pi}{2} = (-1)^p$

d' où**conclusion:** $\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$.

• La formule de Parseval - Bessel donne : $2\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 dx = \pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. D' où :

conclusion: $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{(\pi - x)^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$.

Question 3.

a) $\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta = Re\left(e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$ d' après 1.4.a. d' où

conclusion: $$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta = \begin{cases}\dfrac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\dfrac{n+1}{2}\theta & \text{si } \theta \neq 0 \ (2\pi) \\ n \text{ si } \theta = 0 \ (2\pi)\end{cases}.$$

---

b) Pour x réel on pose $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}$. On a $S_n^{'}(x)=\sum_{k=1}^{n}\cos kx$ de sorte qu' on a pour

$$x\in\left]0,\pi\right[\ ,\ S_n^{'}(x)=\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{n+1}{2}x=\frac{1}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\ .$$

Comme $S_n(0)=0$, on peut écrire que pour $x\in\left]0,\pi\right[$, $S_n(x)=\int_0^x S_n^{'}(t)\,dt$, d' où :

$$\textbf{conclusion:}\qquad \forall x\in\left]0,\pi\right[\ ,\ S_n(x)=-\frac{x}{2}+\int_0^x\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt\ .$$

Rq: La formule reste en fait valable pour $x\in\left]0,2\pi\right[$.

---

c) Prolongement par continuité en 0 de la fonction $t\mapsto\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}$.

On a $\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}=\frac{t-\sin t}{t\sin t}\sim\frac{\frac{t^3}{6}}{t^2}=\frac{t}{6}$ au voisinage de 0. On peut donc prologer par continuité par la valeur 0.

$\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}$ étant continue par exemple sur $[0,1]$, est bornée sur ce segment. Notons M un majorant de $\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}$ sur $[0,1]$, on a alors : $0\le\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\le M$ sur $[0,1]$.

- $\int_0^{h_n}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)dt\le Mh_n$ dès que $h_n\in[0,1]$ et par suite :

$$\textbf{conclusion:}\qquad \int_0^{h_n}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)dt\to 0 \text{ qd } n\to+\infty\ .$$

- $\int_0^{h_n}\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\right)dt=\int_0^{h_n}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2}\left[\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{\frac{t}{2}}\right]dt$ et par suite :

$$\left|\int_0^{h_n}\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\right)dt\right|\le\frac{1}{2}\int_0^{h_n}\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{\frac{t}{2}}\right)dt=\int_0^{\frac{h_n}{2}}\left(\frac{1}{\sin u}-\frac{1}{u}\right)du\quad(u=\frac{t}{2})$$

$$\textbf{conclusion:}\ \int_0^{h_n}\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\right)dt\to 0 \text{ qd } n\to+\infty\ .$$

---

d) Pour $x \in \left]0,\pi\right[$, $S_n^{'}(x) = \dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \cos\dfrac{n+1}{2}x$ et s' annule donc pour la première fois en changeant de signe pour $\dfrac{n+1}{2}x = \dfrac{\pi}{2}$, soit en $x_n = \dfrac{\pi}{n+1}$.

x_n est >0 et $\to 0$ qd $n \to +\infty$. On peut donc écrire:

$S_n(x_n) = -\dfrac{x_n}{2} + \displaystyle\int_0^{x_n} \left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} \right) dt + \int_0^{x_n} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt$ et on a donc :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{x_n} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt$. Posons alors $u = (n+\frac{1}{2})t \quad dt = \dfrac{du}{n+\frac{1}{2}}$

$\displaystyle\int_0^{x_n} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t} dt = \int_0^{(n+\frac{1}{2})x_n} \frac{\sin u}{\frac{u}{n+\frac{1}{2}}} \frac{du}{n+\frac{1}{2}} = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{n+1}} \frac{\sin u}{u} du$ et enfin

conclusion: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(x_n) = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du = L$.

---

e) $\dfrac{\sin u}{u}$ est développable en série entière sous la forme $\dfrac{\sin u}{u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(2n+1)!} \quad R = \infty$.

On peut donc intégrer terme à terme entre 0 et π , et on obtient :

$L = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$. Cette série vérifie le critère des séries alternées et la décroissance du module à bien lieu à partir de $n = 1$.

$\left(\left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \dfrac{(2n+1)\pi^2}{(2n+2)(2n+3)^2} \le \dfrac{\pi^2}{(2n+1)^2} < 1 \text{ pour } n \ge 1 \right)$.

Dès lors, on sait que $|R_n| \le \dfrac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)!(2n+3)}$.

On propose pour valeur approchée de L la valeur $U_4 = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}$. Cette valeur sera

à

coup sûr une valeur approchée de L avec une erreur $< 10^{-3}$, si on peut garantir que $\dfrac{\pi^{11}}{(11)!(11)} < 10^{-3}$. Or en effet, en utilisant $\pi^2 < 10$ on a :

$$\frac{\pi^{11}}{(11)!(11)} < \frac{\pi\ 10^5}{(11)!(11)} < \frac{\pi\ 10^2}{9!} < \frac{\pi\ 10}{3.4.6.7.8.9} < \frac{32}{(4.8).3.6.7.9} = \frac{1}{1134}$$

conclusion: on a bien $\dfrac{\pi^{11}}{(11)!(11)} < 10^{-3}$.