X-ENS 2017 - PSI

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes.

- Pour toute fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 1$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f sur cet intervalle (si elle existe). Ainsi, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ etc. On convient que $f^{(0)} = f$.
- Pour tout entier $n \geq 1$, on note $n! = 1 \times \cdots \times n$ la factorielle de n. On convient que $0! = 1$.
- Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes. On pose $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Le déterminant d'une matrice carrée $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera noté $\det(A)$. Sa transposée est notée ${}^tA = [a_{j,i}]_{1 \leq j,i \leq n}$. Lorsque $A = [a_{1,1}] \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ on identifie A au réel $a_{1,1}$.
- On note $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et les fonctions polynomiales associées seront notées indentiquement. Ainsi, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme, alors la fonction polynomiale associée est encore notée P.
- Etant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie E on note 0_E l'élément nul de E, et on note Id_E l'application identité de E dans lui même. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
  Si $L \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E et $n \geq 2$ un entier naturel, on note L^n l'application composée de L avec lui même n fois : $L^n = L \circ L \circ \cdots \circ L$ (n fois). Par convention, $L^0 = \mathrm{Id}_E$ et $L^1 = L$. Le noyau et l'image de L seront notés respectivement $\ker(L)$ et $\mathrm{Im}(L)$.
  Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, on note $F_1 + F_2$ la somme de ces sous-espaces. On écrira $F_1 \oplus F_2$ pour signifier que cette somme est directe. Si, de plus, E est muni d'un produit scalaire, on écrira $F_1 \oplus^{\perp} F_2$ pour signifier que la somme est orthogonale, c'est à dire que F_1 et F_2 sont orthogonaux entre eux. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E sera noté $F^{\perp}$. On notera $\dim(F)$ la dimension de F.

Partie I

Soit $m \geq 2$ un entier naturel et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2m+1$. Cet espace est muni d'un produit scalaire $(.|.)$. Soient T, M deux endomorphismes de E vérifiant les hypothèses suivantes :

(H1) $T^{2m} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $T^{2m+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

(H2) $M^2 = \mathrm{Id}_E$.

(H3) $\forall (v, w) \in E^2,\ (M(v)|w) = (v|M(w))$.

(H4) $T \circ M + M \circ T = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On pose dans la suite

$$F^+ = \ker(M - \mathrm{Id}_E),\ F^- = \ker(M + \mathrm{Id}_E)$$

On considère l'application S de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (v, w) \in E^2,\ S(v, w) = (v|T(w)) + (T(v)|w)$$

et on note G l'ensemble des éléments $u \in E$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(a) $u \in \mathrm{Im}(T)$,

(b) $\forall v \in E,\ S(u, v) = 0$.

1. Pour tout vecteur $v \in E$, on pose

$$v^+ = v + M(v),\ v^- = v - M(v)$$

   (a) Montrer que $\forall v \in E,\ v^+ \in F^+$ et $v^- \in F^-$.

   (b) Montrer que $E = F^+ \oplus^\perp F^-$.

   (c) Montrer que $\forall v \in F^+$, $T(v) \in F^-$ et que $\forall v \in F^-,\ T(v) \in Fk$.
   En déduire que F^+ et F^- sont stables par T^2.

2. Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, 2m\}$, $\mathrm{Im}(T^{k+1}) \subset \mathrm{Im}(T^k)$ et $\mathrm{Im}(T^{k+1}) \neq \mathrm{Im}(T^k)$.

3. En déduire que pour tout $k \in \{0, \ldots, 2m+1\}$, on a

$$\dim(\mathrm{Im}(T^k)) = 2m + 1 - k,\ \dim(\ker(T^k)) = k$$

4. En déduire aussi que $\mathrm{Im}(T^k) = \ker(T^{2m+1-k})$ pour $0 \leq k \leq 2m+1$.

5. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, 2m+1\}$ et $z \in \mathrm{Im}(T^k)^\perp \cap \mathrm{Im}(T^{k-1})$ tel que $z \neq 0_E$. Après avoir justifié l'existence d'un tel vecteur z, montrer que $T^{2m+1-k}(z) \neq 0_E$.

6. Montrer que pour tout nombre réel α, l'endomorphisme $\mathrm{Id}_E + \alpha T^2$ est bijectif et que

$$(\mathrm{Id}_E + \alpha T^2)^{-1} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \alpha^k T^{2k}$$

   où $(\mathrm{Id}_E + \alpha T^2)^{-1}$ désigne l'endomorphisme inverse de $\mathrm{Id}_E + \alpha T^2$.

7. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et que $G \cap \ker(T) = \{0_E\}$.

8. En déduire que l'application $(v, w) \in G \times G \mapsto (T(v)|T(w))$ est un produit scalaire sur G.

9. Soit $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Montrer que $M \circ T^k = (-1)^k T^k \circ M$.

   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(T^k)$ et $\ker(T^k)$ sont stables par M.

10. Montrer que l'une des deux assertions suivantes est vraie : (i) $\ker(T) \subset F^+$, (ii) $\ker(T) \subset F^-$.

11. On suppose ici que $\ker(T) \subset F^+$.

    (a) Montrer que $\forall z \in F^-$, $T^{2m}(z) = 0_E$.

    (b) Montrer que $\mathrm{Im}(T)^\perp \subset F^+$ et que $\mathrm{Im}(T^2)^\perp \cap \mathrm{Im}(T) \subset F^-$.

    (c) Soit $z \in \mathrm{Im}(T)^\perp$ avec $z \neq 0_E$. Montrer que $T(z) \in G^\perp$ et que $T(z) \neq 0_E$.

    (d) Soit $z \in \mathrm{Im}(T^2)^\perp \cap \mathrm{Im}(T)$ avec $z \neq 0_E$. Montrer que $T(z) \in G^\perp$ et que $T(z) \neq 0_E$.

12. On dit désormais qu'un couple $(w_1, w_2) \in E \times E$ est une *paire caractérisante* de G si w_1 et w_2 vérifient les trois propriétés :

    (A) $w_1 \in F^+$, $T(w_1) \in G^\perp$ et $T(w_1) \neq 0_E$,

    (B) $w_2 \in F^-$, $T(w_2) \in G^\perp$ et $T(w_2) \neq 0_E$,

    (C) $w_i \in \mathrm{Im}(T^2)^\perp$ pour $i = 1$ et $i = 2$.

    Déduire des questions précédentes l'existence d'une paire caractérisante de G.

13. En déduire que $\dim(G) \leq 2m - 2$.

14. On suppose que G vérifie l'hypothèse suivantes

$$\textbf{(H5)}\ \dim(G) = 2m - 2$$

    Montrer que si (w_1, w_2) est une paire caractérisante de G alors $(T(w_1), T(w_2))$ constitue une base de $G^\perp$.

Partie II

On conserve toutes les notations de la partie I et on suppose que les hypothèses $(H1)$, $(H2)$, $(H3)$, $(H4)$ et $(H5)$ sont toutes satisfaites. Soit (w_1, w_2) une paire caractérisante de G (c'est à dire vérifiant les propriétés (A), (B) et (C) de la question 12).
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le problème suivant, note $\mathcal{P}_\lambda$:

$$\text{Trouver } u \in G \text{ tel que : } \forall v \in G,\ (u|v) - \lambda(T(u)|T(v)) = 0 \qquad (\mathcal{P}_\lambda)$$

et on note H_λ l'ensemble des solutions u de ce problème. On montre facilement que H_λ est un sous-espace vectoriel de G.

15. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
    (a) Montrer que si $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une solution $u \neq 0_E$, alors nécessairement $\lambda > 0$.
    (b) Soit $u \in G$. Montrer que u est une solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$ si et seulement si

    $$(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)(u) \in G^\perp$$

    En déduire qu'il existe deux nombres réels α et β tels que :

    $$u = \alpha(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_1) + \beta(\mathrm{Id}_E + \lambda T^2)^{-1}T(w_2)$$

    (c) Montrer que le problème $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une solution non nulle si et seulement si

    $$Q_1(\lambda).Q_2(\lambda) = 0$$

    où pour $i \in \{1, 2\}$, Q_i est le polynôme

    $$Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (T^{2k+1}(w_i)|T(w_i))X^k$$

    (d) Supposons que λ est racine du polynôme produit Q_1Q_2. Montrer que $\dim(H_\lambda) = 2$ si λ est racine commune de Q_1 et de Q_2, et $\dim(H_\lambda) = 1$ sinon.
    (e) Montrer que

    $$\forall i \in \{1, 2\},\ Q_i(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k S(w_i, T^{2k+1}(w_i))X^k$$

16. Soit $\mathcal{B} = (z_1, \ldots, z_\ell)$, où $\ell = 2m - 2$, une base de G. Pour tout élément u de G, on note U (lettre majuscule) le vecteur colonne comportant les coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$. On note $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq \ell}$ et $B = [b_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq \ell}$ les deux matrices carrées dont les coefficients sont définis par

    $$\forall 1 \leq i, j \leq \ell,\ a_{i,j} = (z_i|z_j),\ b_{i,j} = (T(z_i)|T(z_j))$$

    (a) Soient $u, v \in G$. Montrer que

    $$(u|v) = {}^tUAV,\ (T(u)|T(v)) = {}^tUBV$$

    et en déduire que A et B sont inversibles.
    (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'un élément $u \in G$ est solution de $(\mathcal{P}_\lambda)$ si et seulement si

    $$(A - \lambda B)U = 0$$

    En déduire que $(\mathcal{P}_\lambda)$ admet une solution non nulle si et seulement si $\det(A - \lambda B) = 0$.

(c) On définit la fonction ψ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \psi(t) = \frac{\det(A - tB)}{\det(B)}$$

Montrer que cette fonction ψ est indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$.

(d) Justifier pourquoi on peut choisir la base $\mathcal{B}$ de sorte que $B = I_\ell$. En déduire que ψ est une fonction polynomiale dont on précisera le degré.

(e) Montrer que le polynôme ψ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et que ses racines sont soit simples soit doubles.

(f) Montrer que

$$\psi(X) = \frac{1}{S(w_1, T^{2m-1}(w_1))S(w_2, T^{2m-1}(w_2))} Q_1(X)Q_2(X)$$

(on justifiera pourquoi nécessairement le dénominateur est non nul).
En déduire que Q_1 et Q_2 sont scindés dans $\mathbb{R}[X]$ et à racines simples.

Partie III

On conserve ici les notations des parties I et II et on se place dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}_{2m}[X]$, avec $m \geq 2$ un entier naturel fixé. Cet espace vectoriel est muni du produit scalaire

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$$

Désormais, les deux endomorphismes T et M de E seront définis par

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2m}[X],\ T(P) = P' \ \text{ et } \ M(P) = P^*$$

où $P^*(X) = P(-X)$.
On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{R}_k^0[X] = \{P \in \mathbb{R}_k[X] /\ P(-1) = 0 \ \text{ et } \ P(1) = 0\}$$

17. Montrer que T et M vérifient bien les hypothèses $(H1)$, $(H2)$, $(H3)$ et $(H4)$.
18. Quels sont les espaces F^+ et F^- dans ce cas ?
19. Montrer que
$$\forall (P, Q) \in E^2,\ S(P, Q) = P(1)Q(1) - P(-1)Q(-1)$$
20. Déterminer le sous-espace G. L'hypothèse $(H5)$ est-elle satisfaite ?
21. On définit pour tout entier naturel n le polynôme R_n comme suit
$$R_n(X) = (X^2 - 1)^n$$
et on pose désormais
$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} R_n^{(n)}(X)$$
Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Quel est le degré du polynôme L_n ? Exprimer $M(L_n)$ en fonction de L_n.
   (b) Montrer que si $n \geq 1$ alors
   $$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X],\ (L_n|P) = 0$$

(c) Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a

$$L_n^{(k)}(1) = \frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{1}{k!2^k}$$

(d) Montrer que pour tout entier naturel k, on a

$$S(L_n, L_n^{(2k+1)}) = 2L_n^{(2k+1)}(1)$$

22. Montrer que le couple (L_{2m}, L_{2m-1}) est une paire caractérisante de G.
23. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le problème : trouver $P \in \mathbb{R}^0_{2m-1}[X]$ tel que

$$\forall Q \in \mathbb{R}^0_{2m-1}[X],\ \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt - \lambda \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\ dt = 0$$

Montrer que ce problème admet une solution P non identiquement nulle si et seulement si λ est racine du polynôme

$$K(X) = \left(\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k L_{2m-1}^{(2k+1)}(1)X^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k L_{2m}^{(2k+1)}(1)X^k\right)$$

24. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}^0_{2m-1}[X],\ (P|P) \leq 4(P'|P')$$

avec inégalité stricte si P est non nul.
25. En déduire que les racines de K sont toutes réelles et appartiennent à l'intervalle $]0, 4[$.
26. Soit $(P_1, \ldots, P_{2m-2})$ une base quelconque de G. On considère les deux matrices carrées $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq 2m-2}$ et $B = [b_{i,j}]_{1\leq i,j\leq 2m-2}$ définies par

$$a_{i,j} = (P_i|P_j),\ b_{i,j} = (P'_i|P'_j)$$

Déterminer le rapport

$$\frac{\det(A)}{\det(B)}$$

en fonction de m.