X-ENS PSI - 2012
un corrigé

Préambule.

1. Par définition des limites, la propriété de corecivité s'écrit

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}/\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$$

Utilisons cette propriété avec $A = |f(0)| + 1$. On trouve alors un réel B. En prenant $M = \max(B, 1)$, on obtient un réel $M > 0$ tel que si $\|x\| \leq M$ (et a fortiori si $\|x\| > M$) alors $f(x) \geq |f(0)| + 1$.

2. L'ensemble $B_M = \{x \in \mathbb{R}^n/\ \|x\| \leq M\}$ (boule fermée de centre l'origine de rayon M) est un compact de $\mathbb{R}^n$ (fermé et borné dans cet espace de dimension finie). f étant continue sur ce compact, elle y est bornée et atteint ses bornes (et en particulier son minimum). Il existe donc $x^* \in B_M$ tel que $\forall x \in B_M,\ f(x^*) \leq f(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$; si $x \in B_M$ alors $f(x^*) \leq f(x)$; sinon, $\|x\| > M$ et $f(x) \geq |f(0)|+1 \geq f(0) \geq f(x^*)$ (car $0 \in B_M$). On a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ f(x^*) \leq f(x)$$

3. $\mathbb{R}^n$ étant un ouvert, f (de classe C^1) ne présente (résultat de cours) de valeur localement extremale qu'en des points critiques. On a donc

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Partie 1.

4. Par hypothèse sur A et inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ g(x) \geq \frac{C}{2}\|x\|^2 - \|b\|.\|x\|$$

Comme $C > 0$, le minorant est de limite infinie quand $\|x\| \to +\infty$ et donc g est coercive.

5. Soit $x \in\ \mathbb{R}^n$. En notant $x_1, \dots, x_n$ les coordonnés de x dans la base canonique et comme cette base est orthonormée, on a

$$g(x) = \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}x_ix_j - \sum_{i=1}^n b_ix_i$$

Les théorèmes d'opération nous apprennent que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Comme A est symétrique, on peut écrire que

$$g(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}x_ix_j - \sum_{i=1}^n b_ix_i$$

Quand on dérive l'expression x_ix_j par rapport à la variable x_k, on obtient 0 si $i, j \neq k$. On a alors

$$\forall k,\ \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = a_{k,k}x_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k}x_i + \sum_{j=k+1}^n a_{k,j}x_j - b_k$$

On utilise encore la symétrie de A pour écrire que

$$\forall k,\ \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = a_{k,k}x_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_{i,k}x_i + \sum_{j=k+1}^n a_{j,k}x_j - b_k$$

et on reconnaît dans le membre de droite la k-ième coordonnée de $Ax-b$. On a donc

$$\nabla g(x) = Ax - b$$

Le préambule donne l'existence d'un minimum global x^*. On doit avoir $\nabla g(x^*) = 0$ et donc $Ax^* = b$. Mais A est inversible car si $Ax = 0$ alors $C\|x\|^2 \le (Ax, x) = 0$ et donc (comme $C > 0$) $\|x\|^2 \le 0$ et ainsi $x = 0$ (ce qui donne $\ker(A) = \{0\}$). On doit donc avoir $x^* = A^{-1}b$. On a ainsi l'existence et l'unicité du minimum x^* et

$$x^* = A^{-1}b$$

6. Avec les expressions de ∇g et de x^*, on a

$$\begin{aligned} u_{k+1} - x^* &= u_k - \alpha(Au_k - b) - x^* \\ &= (u_k - x^*) - \alpha(Au_k - Ax^*) \\ &= (I_3 - \alpha A)(u_k - x^*) \end{aligned}$$

7. On suppose que $\alpha \in]0, 2/L[$.
A étant symétrique réelle, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour A. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une telle base et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. L'hypothèse sur A indique que $\forall i,\ \lambda_i\|e_i\|^2 = (Ae_i, e_i) \ge C\|e_i\|^2$ et on a donc $\lambda_i \ge C > 0$ pour tout i. Par ailleurs, comme $\alpha < \frac{2}{L}$ et $L > 0$, on a $\alpha L < 2$ et donc $\forall i,\ \alpha\lambda_i < 2$. Finalement, on a montré que

$$\forall i,\ -1 < 1 - \alpha\lambda_i < 1$$

En particulier, tous les $(1-\alpha\lambda_i)^2$ sont dans $[0,1[$ et leur maximum (qui existe car on a un nombre fini non nul de quantités) est aussi dans $[0,1[$:

$$K = \max_{1\le i\le n} (1 - \alpha\lambda_i)^2 \in [0, 1[$$

Soit $y \in \mathbb{R}^n$; il existe des scalaires $y_1, \dots, y_n$ tels que $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. On a (la base étant orthonormée)

$$\|(I_n - \alpha A)y\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^n (1 - \alpha\lambda_i) y_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n (1 - \alpha\lambda_i)^2 y_i^2 \le K\|y\|^2$$

La question précédente donne alors

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|u_{k+1} - x^*\|^2 \le K\|u_k - x^*\|^2$$

et une récurrence imémdiate indique que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \|u_k - x^*\|^2 \le K^k\|u_0 - x^*\|^2$$

Le majorant est de limite nulle quand $k \to +\infty$ et ainsi

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = x^*$$

Partie 2.

8. On a

$$\begin{array}{rcl} h(x_{k+1}) & = & (x_k+\varepsilon_k t_k)^2 \\ & = & h(x_k)+t_k\varepsilon_k(\varepsilon_k t_k+2x_k) \\ & = & h(x)+\begin{cases} 0 \text{ si } x_k=0 \\ t_k(t_k+2x_k) \text{ si } x_k<0 \\ t_k(t_k-2x_k) \text{ si } x_k>0 \end{cases} \end{array}$$

Comme $t_k \leq 2x_k$ si $x_k>0$ et $t_k \leq -2x_k$ si $x_k<0$, le terme complémentaire est toujours négatif et

$$h(x_{k+1}) \leq h(x_k)$$

9. Pour tout k, on a $v_{k+1}-v_k=-\frac{1}{2^{k+1}}$. Quand on somme, les termes se télescopent et on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ v_k=v_0-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{2^{i+1}}=1+\frac{1}{2^k}$$

formule qui reste valable pour $k=0$.
Posons, pour tout k, $\varepsilon_k=-1$ et $t_k=\frac{1}{2^{k+1}}$. Les v_k étant tous strictement positifs, la suite (ε_k) vérifie les bonnes relations. Comme $2|v_k|=2+\frac{1}{2^{k-1}}>2\geq t_k>0$, la suite (t_k) vérifie aussi les bonnes relations. (v_k) est ainsi une suite de descente par gradient pour h.
La suite (v_k) est convergente de limite 1 qui n'est pas le minimum global de h (celui-ci est nul).

10. Le même processus de télescopage donne cette fois

$$\forall k \in \mathbb{N},\ w_k=(-1)^k+\frac{(-1)^k}{2^k}$$

formule que l'on peut d'ailleurs aussi vérifier par récurrence.
Comme $w_{2k}>0$ et $w_{2k+1}<0$, on pose $\varepsilon_k=(-1)^{k+1}$ et $t_k=2+\frac{3}{2^{k+1}}$. On a alors $w_{k+1}=w_k+\varepsilon_k t_k$ pour tout k, la suite (ε_k) qui vérifie les bonnes relations ainsi que la suite (t_k) (pour tout k, $0<t_k<2|w_k|=2+\frac{1}{2^{k-1}}$ car $3<4$). La suite (w_k) est ainsi une suite de descente par gradient pour h.
Comme $w_{2k}\to 1$ et $w_{2k+1}\to -1$, la suite (w_k) ne converge par ailleurs pas.

Partie 3.

11. On suppose $\nabla f(x)\neq 0$; on a alors $d=-\frac{1}{\|\nabla f(x)\|}\nabla f(x)$ qui vérifie $\|d\|=1$ et $(d,\nabla f(x))=-\|\nabla f(x)\|<0$. Ainsi $d\in D_x$ et $D_x\neq\emptyset$.
Soit maintenant $d\in D_x$ (l'existence d'un tel d impliquant que $\nabla f(x)\neq 0$ sinon $(d,\nabla f(x))=0$ ce qui contredit $d\in D_x$). Posons $\phi\ :\ t\mapsto f(x+td)$; ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\phi'\ :\ t\mapsto(\nabla f(x+td)|d)$. Comme $d\in D_x$, $\phi'(0)<0$. Par continuité de ϕ', il existe $r>0$ tel que $\forall t\in[-r,r],\ \phi'(t)<0$.
Par égalité des accroissements finis, il existe $c\in]0,r[$ tel que $\phi(r)-\phi(0)=r\phi'(c)<0$. ceci s'écrit $f(x+rd)-f(x)<0$ et on a donc $r\in T_{d,x}$. Ainsi, $T_{d,x}$ est non vide.

12. On est dans le cas où $n=1$, $\nabla h(x)=h'(x)=2x$.
- Si $x_k=0$ alors $\nabla h(x_k)=0$ et $t_k=d_k=0$ (ce qui correspond à $t_k=\varepsilon_k=0$ dans la partie 2).
- Si $x_k>0$ alors $D_{x_k}=\{-1\}$ donc $d_k=-1$ et $T_{d_k,x_k}=\{t>0/\ t(-2x_k+t)<0\}=]0,2x_k[=]0,2|x_k|[$.
- Si $x_k<0$ alors $D_{x_k}=\{1\}$ donc $d_k=1$ et $T_{d_k,x_k}=\{t>0/\ t(2x_k+t)<0\}=]0,-2x_k[=]0,2|x_k|[$.

On retrouve donc exactement la situation de la partie 2.

13. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $\nabla f(x_k) \neq 0$ alors, par définition de T_{d_k,x_k}, on a

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + t_k d_k) < f(x_k)$$

Si $\nabla f(x_k) = 0$ on a $f(x_{k+1} = f(x_k)$. On a donc, de façon générale,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$$

et la suite $(f(x_k))$ est décroissante. Quand f est coercive, le préambule montre que f est minorée et donc $(f(x_k))$ l'est aussi. C'est finalement une suite convergente par théorème de limite monotone.
Si, par l'absurde, la suite (x_k) n'était pas bornée, on pourrait en extraire une suite $(x_{\psi(k)})$ telle que $\|x_{\psi(k)}\| \to +\infty$ et on aurait alors $f(x_{\psi(k)}) \to +\infty$ (composition de limites) ce qui nie la convergence de $(f(x_k))$ (qui entraîne la convergence de toute extraite). On a donc (x_k) qui est bornée.

14. Commeçons par le calcul préliminaire proposé. On se donne $k \in \mathbb{N}$ et on pose $r_k = \nabla g(u_k) = Au_k - b$; on a

$$\begin{aligned}
g(u_{k+1}) - g(u_k) &= g(u_k - \alpha r_k) - g(u_k) \\
&= -\frac{\alpha}{2}(Au_k, r_k) - \frac{\alpha}{2}(Ar_k, u_k) + \frac{\alpha^2}{2}(Ar_k, r_k) + \alpha(b, r_k) \text{ par développement} \\
&= -\alpha(Au_k, r_k) + \frac{\alpha^2}{2}(Ar_k, r_k) + \alpha(b, r_k) \text{ par symétrie de } A \\
&= -\alpha(r_k + b, r_k) + \frac{\alpha^2}{2}(Ar_k, r_k) + \alpha(b, r_k) \text{ car } Au_k = b + r_k \\
&= -\alpha\|r_k\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}(Ar_k, r_k)
\end{aligned}$$

Si $r_k \neq 0$, on pose $t_k = \alpha\|r_k\|$ et $d_k = -\frac{r_k}{\|r_k\|}$; sinon, on pose $d_k = 0$ et $t_k = 0$. Dans les deux cas, on a $u_{k+1} = u_k + t_k d_k$. De plus, dans le cas où $r_k \neq 0$, on a
- $\|d_k\| = 1$ et $(d_k|r_k) = -\|r_k\| < 0$;
- $g(u_k + d_k t_k) - g(u_k) = g(u_{k+1}) - g(u_k) = -\alpha\|r_k\|^2 + \frac{\alpha^2}{2}(Ar_k, r_k)$. Comme en fin de partie 1, on a $(Ar_k, r_k) \leq L\|r_k\|^2$ où L est le maximum des modules des valeurs propres de A et ainsi

$$g(u_k + d_k t_k) - g(u_k) \leq -\alpha\left(1 - \frac{\alpha L}{2}\right)\|r_k\|^2$$

Si $\alpha \in]0, 2/L[$, cette quantité est < 0. Comme $t_k > 0$, on a finalement $t_k \in T_{d_k,x_k}$.
Si $\alpha \in]0, 2/L[$, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de descente par gradient pour la fonction g.

Partie 4.

15. On a, en sommant les inégalités (2)

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(x_k) - f(x_0) \leq m_1 \sum_{i=0}^{k-1} t_i(d_i, \nabla f(x_i))$$

Comme f est coercive, la question 13. indique que la suite $(f(x_k))$ est bornée (puisque convergente). Ce qui précède montre que les sommes partielles de la série de terme général $t_k(d_k, \nabla f(x_k))$ est minorée. Comme ce terme général est négatif (par choix de d_k et comme $t_k \geq 0$), cette suite des sommes partielles décroît. Elle est finalement convergente. La convergence d'une série entrainant la convergence vers 0 du terme général, on a donc

$$\lim_{k\to+\infty} t_k(d_k, \nabla f(x_k)) = 0$$

16. Soit $k \in \mathbb{N}$; distinguons deux cas
   - Si $C_1 \leq C_2|(d_k, \nabla f(x_k))|$ alors $t_k \geq C_1$ et donc $|t_k(d_k, \nabla f(x_k))| \geq C_1|(d_k, \nabla f(x_k))|$.
   - Sinon, $t_k \geq C_2|(d_k, \nabla f(x_k))|$ et donc $|t_k(d_k, \nabla f(x_k))| \geq C_2|(d_k, \nabla f(x_k))|^2$.

   Dans le cas général, on a donc

$$|(d_k, \nabla f(x_k))| \leq \frac{b_k}{C_1} + \frac{\sqrt{b_k}}{\sqrt{C_2}} \quad \text{où} \quad b_k = |t_k(d_k, \nabla f(x_k))|$$

   Comme on a vu que $b_k \to 0$, on en déduit que

$$\lim_{k \to +\infty} (d_k, \nabla f(x_k)) = 0$$

17. B étant symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base diagonalisation et λ_i la valeur propre associée à e_i. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $x_1, \dots, x_n$ ses coordonnées dans la base des e_i. Comme en question 7, on a

$$(Bx, x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \geq \mu \|x\|^2 \quad \text{et} \quad \|Bx\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 x_i^2 \right)^{1/2} \leq \lambda \|x\|$$

   où $\mu > 0$ et $\lambda > 0$ sont respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de B. On a ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ \frac{\mu}{\lambda} \|x\| \leq \frac{(Bx, x)}{\|Bx\|}$$

   En particulier, avec $x = \nabla f(x_k)$ (quand $\nabla f(x_k) \neq 0$), on obtient $\frac{\mu}{\lambda} \|\nabla f(x_k)\| \leq |(d_k|\nabla f(x_k))$. L'inégalité reste vraie quand le gradient est nul. Comme le majorant est de limite nulle, on en déduit que

$$\lim_{k \to +\infty} \nabla f(x_k) = 0$$

18. f étant coercive, elle admet au moins un minimum global. Supposons, par l'absurde, qu'il existe deux mimina globaux $x_1^* < x_2^*$. Par convexité, le graphe de la courbe sur $]x_1^*, x_2^*[$ est strictement sous la corde reliant $(x_1^*, f(x_1^*))$ et $(x_2^*, f(x_2^*))$. Mais comme $f(x_1^*) = f(x_2^*)$ cela signifie que f prend des valeurs strictement plus petite qu'au point où elle est minimale ce qui est une contradiction. Il y a donc un unique minimum global.

19.