CX1611

Banque commune **École Polytechnique – ENS de Cachan**

PSI

Session 2011

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 **heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de calculatrice électronique de poche à alimentation autonome, non imprimante et sans document d'accompagnement, est autorisé selon la circulaire n 99018 du 1er février 1999. De plus, une seule calculatrice est admise sur la table, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Préambule

Avertissement : La lecture des rappels et définitions ci-dessous n'est pas optionnelle. Le candidat devra se reporter à ce préambule à chaque fois qu'une notion nouvelle sera utilisée dans l'énoncé. Les parties 1,2 et 3 sont largement indépendantes.

On désignera par $\mathbb{R}^d$ l'espace euclidien de dimension $d \geq 1$. On notera $|\cdot|$ la norme euclidienne canonique

$$|X| = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\right)^{1/2} \qquad \text{pour} \qquad X = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

associée au produit scalaire canonique

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i \, y_i \qquad \text{pour} \qquad X, Y \in \mathbb{R}^d.$$

On considérera $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille d et $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes de taille d. On notera Id_d la matrice carrée identité de taille d, $\mathbf{0}_d$ la matrice nulle de taille d, et $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ la matrice carrée diagonale dont les coefficients sur la diagonale sont donnés par $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$.

On note $\mathcal{T}_d^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille d sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire $M \in \mathcal{T}_d^+(\mathbb{C})$ si et seulement si $M_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$. On note $\mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M réelles symétriques (c'est-à-dire telles que $M_{i,j} = M_{j,i}$ pour tout i, j), et on note $\mathcal{A}_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices M réelles antisymétriques (c'est-à-dire telles que $M_{i,j} = -M_{j,i}$ pour tout i, j).

On dira que deux matrices $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathbb{C}$ s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ inversible telle que $M_2 = P^{-1} M_1 P$, et on dira que deux matrices $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathbb{R}$ s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ inversible telle que $M_2 = P^{-1} M_1 P$.

On dira qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $M^k = 0$.

On définit l'exponentielle d'une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ par

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

On définit sur l'espace des matrices $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la norme suivante

$$|||A||| := \sup_{X \in \mathbb{R}^d,\ X \neq 0} \frac{|AX|}{|X|}.$$

On notera $\Re e\, z$ la partie réelle d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$.

1 Matrices et réversibilité

On considère $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. On lui associe le système paramétré par $U_0 \in \mathbb{R}^d$

$$U'(t) = AU(t), \quad U(0) = U_0 \in \mathbb{R}^d \tag{1}$$

composé d'une équation différentielle de la variable réelle (notée t), à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et d'une donnée en $t = 0$.

1. Montrer en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz que (1) admet, pour tout $U_0 \in \mathbb{R}^d$, une unique solution sur $[0, +\infty)$.
2. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Montrer que la suite
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$
est une suite de Cauchy pour la norme $|||\cdot|||$ et en déduire que $\exp(A)$ est bien défini.
3. Montrer que pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ la matrice $\exp(A)$ est inversible, et que pour $P \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ inversible on a
$$\exp\left(P^{-1}AP\right) = P^{-1}\exp(A)P.$$
4. On **admettra** que pour $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, la fonction
$$E_A : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad t \to \exp(tA)$$
est C^1 sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée vérifie
$$\frac{d}{dt}E_A(t) = A\, E_A(t).$$
Montrer que la solution de (1) est donnée par $U(t) = \exp(tA)\, U_0$.
5. En utilisant un changement de variable, montrer, que pour toute donnée finale $U_0 \in \mathbb{R}^d$, l'équation (1) admet une unique solution $U(t)$, $t \leq 0$.
6. On dira que le système (1) est *irréversible bien orienté* si pour toute norme $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{R}^d$ on a
$$\forall U_0 \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{t\to+\infty} \mathcal{N}(U(t)) = 0. \tag{2}$$
Il sera dit *irréversible mal orienté* si pour toute norme $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{R}^d$ on a
$$\forall U_0 \in \mathbb{R}^d,\ U_0 \neq 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \mathcal{N}(U(t)) = +\infty. \tag{3}$$
On parlera simplement de *système irréversible* lorsque l'orientation ne sera pas précisée. Dans le cas contraire, le système sera dit *non orienté*. Montrer que les assertions (2) et (3) sont vérifiées pour toute norme $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{R}^d$ dès qu'elles sont vérifiées pour la norme euclidienne canonique $|\cdot|$.
7. Le but de cette question est de démontrer le théorème de trigonalisation de Schur : **toute matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est semblable dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ à une matrice de $\mathcal{T}_d^+(\mathbb{C})$** (triangulaire supérieure). Nous allons raisonner par récurrence sur la dimension d.
   (a) Montrer que la propriété est vraie pour $d = 1$.
   (b) Montrer que, pour $d \geq 2$, toute matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice qui s'écrit par blocs
   $$M' = \begin{pmatrix} \lambda & \dots \\ \mathbf{0}_{d-1} & N \end{pmatrix}$$
   avec $N \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{C})$.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

(c) Appliquer l'hypothèse de récurrence à la matrice N et conclure.

8. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, toute matrice $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de la forme $D + N_\varepsilon$ avec D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M et N_ε une matrice dont tous les coefficients sont de modules plus petits que ε. On pourra utiliser la question précédente ainsi que le changement de base par la matrice de passage $P = \mathrm{Diag}(\delta, \delta^2, \ldots, \delta^d)$ pour un $\delta > 0$ bien choisi.

9. Montrer que pour un réel $\alpha > 0$ et une fonction numérique dérivable g sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, l'inégalité différentielle $g' \leq \alpha\, g$ implique $g(t) \leq e^{\alpha(t-s)}\, g(s)$ pour tout segment $[s, t]$ inclus dans J.

10. On considère $A = D + N_\varepsilon$ avec $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ et N_ε une matrice dont tous les coefficients sont de modules plus petits que ε. Montrer en utilisant les questions précédentes que les solutions de (1) vérifient
$$|U(t)| \leq e^{(\sigma + d\varepsilon)t}\, |U_0|$$
avec $\sigma = \max\{\Re e\, \lambda_1, \ldots, \Re e\, \lambda_d\}$.

11. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. En utilisant les questions précédentes 5 et 6, montrer l'équivalence entre le fait que le système (1) soit irréversible bien orienté et le fait que les valeurs propres de A soient toutes de partie réelle strictement négative. De même montrer l'équivalence entre le fait que le système (1) soit irréversible mal orienté et le fait que les valeurs propres de A soient toutes de partie réelle strictement positive.

12. Montrer qu'un système irréversible bien orienté vérifie
$$\forall\, U_0 \in \mathbb{R}^d,\ U_0 \neq 0, \quad \lim_{t \to -\infty} \mathcal{N}(U(t)) = +\infty$$
et qu'un système irréversible mal orienté vérifie
$$\forall\, U_0 \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_{t \to -\infty} \mathcal{N}(U(t)) = 0.$$

2 Matrices et entropie

1. On considère une norme $\mathcal{N}$ associée à un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$, que nous noterons $\langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{N}}$ pour deux vecteurs $U_1,\ U_2 \in \mathbb{R}^d$. On rappelle l'identité $\mathcal{N}(U) = \langle U, U \rangle_{\mathcal{N}}^{1/2}$. On appelle *entropie* du système (1) une norme $\mathcal{N}$ associée à un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ qui vérifie
$$\forall\, U_0 \in \mathbb{R}^d, \quad \forall\, t \geq 0, \quad \frac{d}{dt}\mathcal{N}(U(t)) \leq 0$$
et on appelle *entropie stricte* du système (1) une norme $\mathcal{N}$ associée à un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ qui vérifie
$$\forall\, U_0 \in \mathbb{R}^d,\ U_0 \neq 0, \quad \forall\, t \geq 0, \quad \frac{d}{dt}\mathcal{N}(U(t)) < 0.$$
Justifier que ces définitions ont bien un sens (justifier en particulier la dérivabilité par rapport à t).

2. On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(a) Calculer explicitement la matrice $\exp(tA)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que le système (1) associé à A est irréversible bien orienté.

(c) Montrer que la norme euclidienne $|\cdot|$ n'est pas une entropie pour ce système.

3. En vous inspirant de la question précédente, montrer que plus généralement, en toute dimension $d \geq 2$, il existe des matrices $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telles que le système (1) soit irréversible bien orienté mais dont la norme euclidienne usuelle $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}^d$ n'est pas une entropie.

4. On souhaite montrer le théorème suivant : **tout système irréversible bien orienté admet une entropie stricte**.

   (a) Montrer que pour un système irréversible bien orienté, pour toute norme $\mathcal{N}$ associée à un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$,

   $$\forall\, U_0 \in \mathbb{R}^d,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{N}\left(\exp(tA)U_0\right) \leq C\, e^{-\lambda\, t}\, \mathcal{N}(U_0) \tag{4}$$

   pour des constantes $C \geq 1$ et $\lambda > 0$. On utilisera les questions 8, 11 et 12 de la partie 1.

   (b) Montrer que la borne supérieure λ_0 des λ pour lesquels (4) est vrai est la plus grande des parties réelles des valeurs propres (et donc qu'elle ne dépend pas de la norme $\mathcal{N}$). On pourra s'inspirer de la question 11 de la partie 1.

   (c) Cette borne inférieure est-elle toujours atteinte (*i.e.*, (4) est-elle toujours vérifiée pour λ_0) ? (on démontrera la réponse).

   (d) On considère une norme $\mathcal{N}$ associée à un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) La norme $\mathcal{N}$ est une entropie stricte du système (1).
   (ii) L'inégalité (4) est vérifiée pour la norme $\mathcal{N}$ avec des constantes $\lambda > 0$ et $C = 1$.

   (e) Montrer que la norme $\mathcal{N}_A$ définie par le produit scalaire suivant est bien définie :

   $$\forall\, U_1, U_2 \in \mathbb{R}^d, \quad \langle U_1, U_2 \rangle_{\mathcal{N}_A} := \int_0^{+\infty} \langle \exp(sA)U_1, \exp(sA)U_2 \rangle \, ds.$$

   Démontrer le théorème annoncé au début de la question 4 en utilisant $\mathcal{N}_A$.

5. Dans le cas de la dimension $d = 2$ et de la matrice A de la question 2, calculer explicitement la norme $\mathcal{N}_A$ définie dans la question 4 (e).

6. On considère une fonction g de la variable réelle x, continue et bornée sur $\mathbb{R}$ avec $g(0) = 1$, et un système (1) irréversible bien orienté en dimension $d = 1$. On note $f(t,x) := g(U(t))$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, où $U(t)$ est la solution de (1) au temps t pour la donnée initiale $U_0 = x$. Montrer que l'intégrale

   $$\int_{\mathbb{R}} f(t,x)\, \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$$

   est bien définie et converge vers 1 lorsque $t \to +\infty$.

3 Matrices et hypocoercivité

On dira que le système (1) est *hypocoercif* s'il admet une entropie stricte $\mathcal{N}$ mais que la norme euclidienne usuelle $|\cdot|$ est une entropie mais pas une entropie stricte pour ce système.

1. Montrer que la norme euclidienne usuelle est une entropie de (1) si et seulement si on a l'inégalité suivante :
$$\forall X \in \mathbb{R}^d, \quad \langle AX, X\rangle \leq 0$$
et qu'elle est une entropie stricte de (1) si et seulement si on a :
$$\forall X \in \mathbb{R}^d,\ X \neq 0, \quad \langle AX, X\rangle < 0.$$
Remarquer que cette formulation ne dépend plus du problème d'évolution. Nous parlerons donc sans ambiguïté d'hypocoercivité pour une matrice $A \in \mathcal{M}^d(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $A = S+K$ où $S \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ de valeurs propres toutes strictement négatives et $K \in \mathcal{A}_d(\mathbb{R})$, alors le système est irréversible bien orienté et admet la norme $|\cdot|$ comme entropie stricte. On utilisera le fait que toute matrice $S \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ est semblable (dans $\mathbb{R}$) à une matrice diagonale.
3. On considère, avec $d = 2$, la matrice $A = T_0 + L_0$ avec
$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Montrer l'hypocoercivité de A et calculer la norme $\mathcal{N}_A$ de la question 4 (e), Partie 2.
4. On considère maintenant $A = T + L$ sur R^d $(d \geq 2)$ avec
$$T = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{d-2} \end{pmatrix},$$
où T_0 est la matrice carrée de taille $2*2$ définie dans la question 3, $L = \mathrm{Diag}(0, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ est une matrice diagonale avec une valeur propre nulle et les autres strictement négatives : $\lambda_i < 0$, $2 \leq i \leq d$. Montrer que le système (1) est irréversible bien orienté.
5. Sous les mêmes hypothèses que la question précédente, montrer l'hypocoercivité de la matrice A.
6. Montrer que si N est une matrice nilpotente non nulle sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, alors
$$\{\langle NX, X\rangle,\ X \in \mathbb{R}^d\} = \mathbb{R}.$$
On pourra commencer par montrer qu'il existe deux vecteurs unitaires e_1, e_2 tels que $N(e_1) = 0$ et $N(e_2) = e_1$.
7. On considère une matrice $A = S + K + \kappa N$, avec $S \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ matrice symétrique de valeurs propres toutes strictement négatives, $K \in \mathcal{A}_d(\mathbb{R})$ matrice antisymétrique, $N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ matrice réelle nilpotente non nulle, et $\kappa \geq 0$. Montrer qu'il existe $\kappa_0 > 0$ tel que :
   - pour $0 \leq \kappa \leq \kappa_0$, la norme euclidienne est une entropie stricte,
   - pour $\kappa > \kappa_0$, la norme euclidienne n'est pas une entropie,
   - pour $\kappa = \kappa_0$, la norme euclidienne est une entropie mais pas une entropie stricte.
8. Montrer que les matrices irréversibles bien orientées forment un ensemble ouvert parmi les matrices (dans cette question et les suivantes, on identifiera $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^{d^2}$ et on utilisera les notions de topologie de $\mathbb{R}^{d^2}$).
9. On appelle E l'ensemble des matrices qui admettent la norme euclidienne comme entropie et E^0 l'ensemble des matrices qui admettent la norme euclidienne comme entropie stricte. Montrer que E est un ensemble convexe fermé et E^o est un ensemble convexe ouvert.
10. On appelle *point extrémal* d'un ensemble convexe F un point de F qui ne peut s'écrire comme barycentre de points de F distincts de lui-même. Déterminer l'ensemble des points extrémaux de l'ensemble
$$F = \partial E \cap \{A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,d},\ \forall\, i, j,\ |a_{ij}| \leq 1\}$$
où on a noté $\partial E = E \setminus E^o$.

FIN DE L'EPREUVE