X - ENS 2011
Un corrigé.

1 Matrices et réversibilité.

1. $U'(t) = AU(t)$ est un système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants et donc continus sur $\mathbb{R}$. Tout problème de Cauchy associé (en imposant $U(t_0) \in \mathbb{R}^d$ pour un t_0 donné) admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}$. En particulier, (1) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ (et a fortiori sur $\mathbb{R}^+$).
Remarque : le théorème de Cauchy-Lipschitz, sous une autre forme, dit que l'ensemble des solutions de $U'(t) = AU(t)$ sur un intervalle I est un espace vectoriel de dimension d.
2. On remarque que $|||.|||$ correspond à la norme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ subordonnée à $|.|$ (en identifiant une matrice à son endomorphisme canoniquement associé). Il s'agit donc d'une norme matricielle :
$$\forall M, N \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}),\ |||MN||| \leq |||M|||\,|||N|||$$
Une récurrence immédiate montre que
$$\forall k \geq 1,\ \left|\left|\left|A^k\right|\right|\right| \leq |||A|||^k$$
Par inégalité triangulaire, on a alors
$$|||S_p - S_m||| \leq \sum_{k=m+1}^{p} \frac{|||A^k|||}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{p} \frac{|||A|||^k}{k!}$$
Comme $\sum x^k/k!$ converge pour tout réel x (de somme e^x), la suite des sommes partielles de $\sum \frac{|||A|||^k}{k!}$ est de Cauchy. D'après l'inégalité précédente, il en est de même de la suite (S_n). Comme $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est complet, on en déduit que cette suite converge. $\exp(A)$ est donc bien définie.
Remarque : plus simplement, $\sum A^k/k!$ est absolument convergente puisque $\left|\left|\left|\frac{A^k}{k!}\right|\right|\right| \leq \frac{|||A|||^k}{k!}$ et on conclut encore par complétude.
3. On considère une matrice inversible P et on note $B = P^{-1}AP$. On a alors
$$\forall k,\ B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$$
On en déduit (les sommes sont finies) que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!} = P^{-1}S_nP$$
$M \mapsto P^{-1}MP$ étant continue (linéaire en dimension finie par exemple, mais on peut aussi conclure par théorèmes généraux), un passage à la limite ($n \to +\infty$) donne
$$\exp(B) = P^{-1}\exp(A)P$$
4. Posons $U(t) = \exp(tA)U_0$. On a $\exp(0_d) = I_d$ (toutes les puissances de 0_n sont nulles à partir de l'exposant 1). Ainsi,
$$U(0) = I_dU_0 = U_0$$
Par ailleurs, $U(t) = E_A(t)U_0$ et comme U_0 est constant,
$$U'(t) = \frac{d}{dt}E_A(t)U_0 = AE_A(t)U_0 = AU(t)$$
On a ainsi montré que U est la solution de (1).

5. *Remarque : le théorème de Cauchy-Lipschitz permet, il me semble, de conclure à l'existence et l'unicité d'une solution de* (1) *sur* $\mathbb{R}^-$. *On va, malgré tout, essayer de répondre dans l'esprit de l'énoncé.*
   Soit U une solution de (1) sur $\mathbb{R}^-$. Posons $V\ :\ t \in \mathbb{R}^+ \mapsto U(-t)$. On a alors $V(0) = U(0) = U_0$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ V'(t) = -U'(-t) = -AU(-t) = -AV(t)$. En utilisant ce qui précède avec $-A$, on en déduit que $\forall t \geq 0,\ V(t) = \exp(-tA)U_0$ et donc $\forall t \leq 0,\ U(t) = \exp(tA)U_0$. Une solution d e(1) sur $\mathbb{R}^-$, si elle existe, est unique et est $t \mapsto \exp(tA)U_0$.
   Réciproquement, le calcul de la question précédente est valable sur $\mathbb{R}^-$ et $t \mapsto \exp(tA)U_0$ est effectivement solution de (1) sur $\mathbb{R}^-$.
6. Dans $\mathbb{R}^d$, qui est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Si $\mathcal{N}$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$, il existe donc des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ c_1|x| \leq \mathcal{N}(x) \leq c_2|x|$$

   Supposons (2) vérifiée pour $|.|$. Pour tout U_0 on a alors $\mathcal{N}(U(t)) \leq c_2|U(t)| \to 0$ et (2) est vraie pour $\mathcal{N}$.
   Supposons (3) vérifiée pour $|.|$. Pour tout $U_0 \neq 0$ on a alors $\mathcal{N}(U(t)) \geq c_1|U(t)| \to +\infty$ et (3) est vraie pour $\mathcal{N}$.
7.
   (a) $\mathcal{T}_1^+(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ et le résultat est donc immédiat pour $d = 1$.
   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, le polynôme caractéristique χ_M de M admet une racine complexe. L'endomorphisme m canoniquement associé admet donc une valeur propre λ. Soit f_1 un vecteur propre associé. On peut compléter la famille libre (f_1) pour obtenir une base $(f_1, \dots, f_d)$ de $\mathbb{C}^d$. Dans cette base m est représenté par une matrice M' dont la première colonne est $(\lambda, 0, \dots, 0)$. En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base $(f_1, \dots, f_n)$, on a donc

$$P^{-1}MP = M' = \begin{pmatrix} \lambda & \dots \\ 0_{d-1} & N \end{pmatrix}$$

   (c) Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}NQ \in \mathcal{T}_{d-1}^+(\mathbb{C})$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}$; P' est inversible et $(P')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre alors que

$$P^{-1}M'P = \begin{pmatrix} \lambda & \dots \\ 0_{d-1} & P^{-1}NP \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_d^+(\mathbb{C})$$

   Par transitivité de la relation de similitude, M est ainsi semblable à un élément de $\mathcal{T}_d^+(\mathbb{C})$.
8. M est semblable à une matrice $T \in \mathcal{T}_d^+(\mathbb{C})$. Le polynôme caractéristique étant un invariant de similitude, T et M ont même valeurs propres (comptées avec leurs multiplicités). De plus, T est triangulaire et ces valeurs propres se trouvent donc sur la diagonale de T. La matrice D de l'énoncé est donc $D = \text{diag}(t_{1,1}, \dots, t_{d,d})$. Posons $N = T - D$. Soit $\varepsilon > 0$; pour tout $j > i$, l'expression $N_{i,j}x^{j-i}$ tend vers 0 quand $x \to 0$ et il existe $\delta_{i,j} > 0$ tel que cette expression est, en module, plus petite que ε pour $x \in [0, \delta_{i,j}]$. Posons

$$P = \text{diag}(\delta, \dots, \delta^d) \ \text{ avec } \ \delta = \min_{1 \leq i < j \leq d} \delta_{i,j}$$

   Il est à noter que le minimum ci dessus existe (car on ne considère qu'un nombre fini de $\delta_{i,j}$) et est > 0. De plus, $\forall j > i,\ |\delta^{j-i}N_{i,j}| \leq \varepsilon$.
   On a $P^{-1}TP = P^{-1}DP + P^{-1}NP$. Multiplier à droite par P revient à multiplier pour tout j

la colonne j par δ^j. Multiplier à gauche par P^{-1} revient à multiplier pour tout i la ligne i par δ^{-i}. On a ainsi $P^{-1}DP = D$ et $P^{-1}NP = N'$ avec $N'_{i,j} = \delta_{j-i}N_{i,j}$. Par choix de δ, $N'_{i,j}$ est plus petit en module que ε si $j > i$. C'est encore vrai si $i \leq j$ (il est alors nul). T, et donc aussi M, est alors semblable à

$$D + N_\varepsilon$$

où N_ε est dans $\mathcal{T}_d^+(\mathbb{C})$ (ce qui n'était pas demandé) et à coefficients plus petits en module que ε.

9. On peut multiplier l'inégalité par $e^{-\alpha u}$ sans changer le sens des inégalités et obtenir

$$\forall u \in J,\ g'(u)e^{-\alpha u} - \alpha g(u)e^{-\alpha u} \leq 0$$

L'application $u \mapsto g(u)e^{-\alpha u}$ est donc décroissante sur l'intervalle J (on vient de voir que sa dérivée est négative sur cet intervalle). Si $[s,t] \subset J$ avec $s \leq t$, on a donc $g(s)e^{-\alpha s} \geq g(t)e^{-\alpha t}$. On ne change pas le sens de l'inégalité en la multipliant par $e^{-\alpha t}$ et on obtient

$$g(t) \leq e^{\alpha(t-s)}g(s)$$

10. On a $U'(t) = (D + N_\varepsilon)U(t)$ et donc

$$\forall i \in [|1;d|],\ U'_i(t) = \lambda_i U_i(t) + (N_\varepsilon U(t))_i$$

On multiplie cette égalité par $2U_i(t)$ et on somme sur i pour obtenir

$$\sum_{i=1}^d \frac{d}{dt}U_i(t)^2 = 2\sum_{i=1}^d \lambda_i U_i(t)^2 + 2\sum_{i=1}^d U_i(t)(N_\varepsilon U(t))_i$$

Puis, en passant à la partie réelle (et comme $U(t)$ est à valeurs réelles)

$$\sum_{i=1}^d \frac{d}{dt}U_i(t)^2 = 2\sum_{i=1}^d \Re(\lambda_i)U_i(t)^2 + 2\sum_{i=1}^d U_i(t)\Re(N_\varepsilon U(t))_i$$

Notons $g\ :\ t \mapsto |U(t)|^2$. On a alors (on passe au module et on utilise l'inégalité triangulaire)

$$|g'(t)| \leq 2\sigma g(t) + 2\sum_{i=1}^d |U_i(t)||(N_\varepsilon U(t))_i|$$

On remarque alors que

$$|(N_\varepsilon U(t))_i| = \left|\sum_{j=1}^d (N_\varepsilon)_{i,j}U_j(t)\right| \leq \sum_{j=1}^d |(N_\varepsilon)_{i,j}||U_j(t)| \leq \varepsilon\sum_{j=1}^d |U_j(t)| \leq \varepsilon\sqrt{d}|U(t)|$$

où on a utilisé l'inégalité de Schwarz pour la dernière égalité (avec le vecteur de coordonnées $|U_i(t)|$ et celui dont les coordonnées valent toutes 1). pour finalement obtenir

$$g'(t) \leq |g'(t)| \leq 2\sigma g(t) + 2\varepsilon\sqrt{d}|U(t)|\sum_{i=1}^d |U_i(t)| \leq 2(\sigma + d\varepsilon)g(t)$$

La question précédente donne alors $g(t) \leq e^{2(\sigma+d\varepsilon)(t-0)}g(0)$ (pour $t \geq 0$). En passant à la racine carrée, on a enfin

$$\forall t \geq 0,\ |U(t)| \leq e^{(\sigma+d\varepsilon)t}|U_0|$$

11. Commençons par la propriété (1) en procédant par équivalence.

- Supposons que $\sigma < 0$ (où σ est le maximum des parties réelles des valeurs propres, que l'on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$). On choisit $\varepsilon = -\frac{\sigma}{2d}$ qui est > 0. La question **8** donne l'existence de P inversible telle que $P^{-1}AP = D + N_\varepsilon$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$ et où les modules des coefficients de N_ε sont $\leq \varepsilon$. Soit U la solution de (1). On a alors

$$U(t) = \exp(tA)U_0 = \exp(P(t(D + N_\varepsilon))P^{-1})U_0 = P\exp(t(D + N_\varepsilon))P^{-1}U_0 = PV(t)$$

où V est la solution de (1) associée à la donnée initiale $P^{-1}U_0$. La question précédente indique que $|V(t)| \leq e^{(\sigma+d\varepsilon)t}|V_0| \leq e^{\frac{\sigma}{2}t}|V_0|$. On a ainsi

$$|U(t)| \leq |||P|||\,|V(t)| \leq e^{\frac{\sigma}{2}t}|V_0|\,|||P|||$$

Comme $\sigma < 0$, cette quantité est de limite nulle en $+\infty$ et la propriété (2) est vérifiée.
- Réciproquement, on suppose que (2) est vérifiée. Soit λ une valeur propre complexe de A et X un vecteur propre associé. L'application $t \mapsto e^{\lambda t}X$ est une solution complexe de $U'(t) = AU(t)$. A étant réelle, les parties réelle et imaginaire de cette solution sont encore des solutions. Ces parties réelle et imaginaire sont donc de limite nulle en $+\infty$. Il en est donc de même du module de $U(t)$ ce qui impose $\Re(\lambda) < 0$.

Passons maintenant à la propriété (3).
- Supposons que (3) est vérifiée. Soit λ une valeur propre complexe de A et X un vecteur propre associé. L'application $t \mapsto e^{\lambda t}X$ est une solution complexe de $U'(t) = AU(t)$. A étant réelle, les parties réelle et imaginaire de cette solution sont encore des solutions. Ces parties réelle et imaginaire sont donc en module de limite infinie en $+\infty$ (à moins qu'elles ne soient nulles mais elles ne peuvent l'être simultanément). Il en est donc de même du module de $U(t)$ ce qui impose $\Re(\lambda) > 0$.
- Réciproquement, on suppose que toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle > 0. Soit U une solution de (1) associée à $U_0 \neq 0$. $V\ :\ t \mapsto U(-t)$ est solution de (1) associée à $-A$ et à U_0. Les valeurs propres de $-A$ ont une partie réelle < 0 et on note μ le maximum de ces parties réelles. On choisit $\varepsilon = -\frac{\mu}{2d}$ qui est > 0. La question **8** donne l'existence de P inversible telle que $P^{-1}(-A)P = D + N_\varepsilon$ où les modules des coefficients de N_ε sont $\leq \varepsilon$. On a

$$V(t) = \exp(-tA)U_0 = \exp(P(t(D + N_\varepsilon))P^{-1})U_0 = P\exp(t(D + N_\varepsilon))P^{-1}U_0 = PW(t)$$

où W est la solution de (1) associée à $-A$ et à la donnée initiale $P^{-1}U_0$. Si on note $g(t) = |W(t)|^2$ on a, comme en question **10**, $g'(t) \leq 2(\mu + d\varepsilon)g(t) = \mu g(t)$. Comme en question **9**, $t \mapsto g(t)e^{\mu t}$ décroît sur $\mathbb{R}$. Ainsi,

$$\forall t \leq 0,\ g(t) \geq g(0)e^{-\mu t}$$

Comme $\mu < 0$, g est de limite $+\infty$ en $-\infty$ ($g(0) \neq 0$ car $U_0 \neq 0$ et donc $W(0) = P^{-1}U_0 \neq 0$) et donc $|W(t)| \to +\infty$ quand $t \to -\infty$. Comme $W(t) = P^{-1}V(t)$, $|W(t)| \leq \left|\left|\left|P^{-1}\right|\right|\right|\,|V(t)|$ et comme $\left|\left|\left|P^{-1}\right|\right|\right| > 0$, on a aussi $|V(t)| \to +\infty$ quand $t \to -\infty$. Finalement, $|U(t)| \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ et (3) est vérifiée.

12. Soit U la solution de (1). On note $V\ :\ t \mapsto U(-t)$ qui est une solution de (1) associée à $-A$.
   - Supposons le système irréversible bien orienté ; les valeurs propres de A sont de partie réelle < 0 et celle de $-A$ de partie réelle > 0. Si on suppose $U_0 = V_0 \neq 0$; on a donc $\mathcal{N}(V(t)) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$ c'est à dire $\mathcal{N}(U(t)) \to +\infty$ quand $t \to -\infty$.
   - Supposons le système irréversible mal orienté ; les valeurs propres de A sont de partie réelle > 0 et celle de $-A$ de partie réelle < 0. On a donc $\mathcal{N}(V(t)) \to 0$ quand $t \to +\infty$ c'est à dire $\mathcal{N}(U(t)) \to 0$ quand $t \to -\infty$.

2 Matrices et entropie.

1. Le seul problème semble être la dérivabilité par rapport à t de l'application $t \mapsto \mathcal{N}(U(t))$ (on pourrait cependant imaginer que la définition se lit : cette application est dérivable et sa dérivée est positive ou strictement positive).
   Il existe une base $(f_1, \dots, f_d)$ de $\mathbb{R}^d$ qui est orthonormée au sens de $(.,.)_\mathcal{N}$. Soient $U_1, \dots, U_d$ les fonctions coordonnées de U dans cette base. On a alors

$$\forall t,\ \mathcal{N}(U(t)) = \left(\sum_{i=1}^{d} U_i(t)^2 \right)^{1/2}$$

   U étant solution de (1) et est donc dérivable. Il en est donc de même des U_i. Par théorèmes généraux, $\phi\ :\ t \mapsto \mathcal{N}(U(t))$ est dérivable en tout point t où ϕ ne s'annule pas c'est à dire où $U(t) \neq 0$. De plus, en un tel point

$$\phi'(t) = \frac{\sum_{i=1}^{d} U_i(t) U_i'(t)}{\mathcal{N}(U(t))} = \frac{(U(t)|U'(t))_\mathcal{N}}{\mathcal{N}(U(t))} = \frac{(U(t)|AU(t))_\mathcal{N}}{\mathcal{N}(U(t))}$$

   S'il existe t_0 tel que $\phi(t_0) = 0$ alors $U(t_0) = 0$. U et la fonction nulle sont alors deux solutions de $V'(t) = AV(t)$ et $V(t_0) = 0$. Par théorème de Cauchy-Lipschitz, ces solutions sont égales. ϕ est alors nulle sur $\mathbb{R}$ et donc dérivable sur $\mathbb{R}$ à dérivée nulle.

2.
   (a) Une récurrence simple montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Par ailleurs, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{n!} = e^{-t} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n n t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{(n-1)!} = -te^{-t}$$

   On en déduit que

$$\exp(tA) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 3t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) A étant triangulaire, on lit ses valeurs propres sur sa diagonale. -1 est l'unique valeur propre et sa partie réelle est < 0. D'après la première partie, le système associé à A est irréversible bien orienté.

   (c) Pour $U_0 = (0,1)$, on a $|U(t)| = |\exp(tA)U_0| = e^{-t}\sqrt{1+9t^2}$ dont la dérivée en t est $\frac{e^{-t}(-9t^2+9t-1)}{\sqrt{1+9t^2}}$. En 1/2, cette dérivée vaut $\frac{5\sqrt{13}}{26\sqrt{e}} > 0$. La norme euclidienne n'est donc pas une entropie.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -I_{d-2} \end{pmatrix}$ où A_1 est la matrice de la question précédente. Un calcul par blocs montre que $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(tA_1) & 0 \\ 0 & \exp(-tI_{d-2}) \end{pmatrix}$.
   -1 étant la seule valeur propre de A, le système associé à A est irréversible bien orienté d'après la première partie.
   Pour $U_0 = (0,1,0,\dots)$, on a $|U(t)| = |\exp(tA)U_0| = e^{-t}\sqrt{1+9t^2}$ qui, on l'a vu ci-dessus, n'est pas à dérivée négative sur $\mathbb{R}^+$. La norme euclidienne n'est donc pas une entropie.

4. *J'ai supposé ici que l'énoncé présentait des erreurs ! Dans la question (a), il me semble plus naturel d'imposer l'inégalité seulement pour des $t \geq 0$. Dans la suite, il y a des problèmes de signes. λ_0 doit être positif et égal à la plus grande des parties réelles des valeurs propres, quantité qui est, elle, négative puisque le système est supposé irréversible bien orienté. Le bon énoncé est certainement $\lambda_0 = -\sigma$ où σ est le maximum des parties réelles des valeurs propres.*

   (a) On suppose le système irréversible bien orienté. En notant σ le maximum des parties réelles des valeurs propres de A, on a donc $\sigma < 0$. En reprenant le calcul de la question **11** de la partie 1, on a alors

   $$\forall U_0 \in \mathbb{R}^d,\ \forall t \geq 0,\ |\exp(tA)U_0| \leq e^{\frac{\sigma}{2}t}|P^{-1}U_0|\,|||P||| \leq e^{\frac{\sigma}{2}t}\,\left|\left|\left|P^{-1}\right|\right|\right|\,|||P|||\,|U_0|$$

   Comme $|.|$ et $\mathcal{N}$ sont des normes équivalentes, il existe des constantes c_1 et c_2 telles que $\forall x \in \mathbb{R}^d,\ c_1|x| \leq \mathcal{N}(x) \leq c_2|x|$ et ainsi

   $$\forall U_0 \in \mathbb{R}^d,\ \forall t \geq 0,\ |\exp(tA)U_0| \leq C' e^{\frac{\sigma}{2}t}\mathcal{N}(U_0) \ \text{ avec }\ C' = \frac{c_2}{c_1}\left|\left|\left|P^{-1}\right|\right|\right|\,|||P|||$$

   C'est la relation voulue avec $\lambda = -\frac{\sigma}{2} < 0$ et en prenant $C = \max(1, C')$.

   (b) On a deux choses à montrer : que tout λ pour lequel (4) est vrai est $\leq -\sigma$ (maximum des parties réelles des valeurs propres) et que (4) est vraie pour des λ arbitrairement proches de $-\sigma$.

   - Dans la question **11.** de la partie 1, on a travaillé avec un $\varepsilon > 0$ particulier mais on aurait pu mener les mêmes calculs pour un $\varepsilon > 0$ quelconque. On obtient alors une relation comme à la question précédente en remplaçant $\frac{\sigma}{2}$ par $\sigma + d\varepsilon$. La relation (4) est alors vérifiée pour $\lambda = -(\sigma + d\varepsilon)$ qui est arbitrairement proche de $-\sigma$.
   - Supposons que (4) soit vérifiée pour un λ donné. Soit μ une valeur propre complexe de A et X un vecteur propre associé. L'application $t \mapsto e^{\mu t}X$ est une solution complexe de $U'(t) = AU(t)$. En notant $\mu = a + ib$ et $X = X_1 + iX_2$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^d$), les fonctions $U_1\ :\ t \mapsto e^{at}(\cos(bt)X_1 - \sin(bt)X_2)$ et $U_2\ :\ t \mapsto e^{at}(\cos(bt)X_2 + \sin(bt)X_1)$ sont solutions de (1) avec $U_1(0) = X_1$ et $U_2(0) = X_2$. On a alors

   $$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \mathcal{N}(e^{at}(\cos(bt)X_1 - \sin(bt)X_2)) \leq Ce^{-\lambda t}\mathcal{N}(X_1)$$

   $$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \mathcal{N}(e^{at}(\cos(bt)X_2 + \sin(bt)X_1)) \leq Ce^{-\lambda t}\mathcal{N}(X_2)$$

   X_1 ou X_2 est non nul. Si, par exemple, $X_1 \neq 0$ on a alors

   $$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \frac{1}{C\mathcal{N}(X_1)}\mathcal{N}(\cos(bt)X_1 - \sin(bt)X_2) \leq e^{-(\lambda+a)t}$$

   On peut trouver des t arbitrairement grands tels que $\cos(bt) = 1$ et $\sin(bt) = 0$. Pour ces t, $e^{-(\lambda+a)t} \geq 1/C$ et comme les t peuvent être aussi grands que l'on veut, ceci impose $\lambda + a \leq 0$ (sinon, l'expontielle s'approche de 0). λ est donc plus petit que l'opposé de la partie réelle de toute valeur propre et est donc plus petit que $-\sigma$.

   La borne supérieure des λ convenables est ainsi $-\sigma$.

   (c) Dans l'exemple de la question **2** (ou **3** pour un d quelconque) on a trouvé un U_0 pour lequel $|U(t)| = e^{-t}\sqrt{1+9t^2}$ et on a $\sigma = -1$. Ainsi $t \mapsto e^{-\sigma t}|U(t)| = \sqrt{1+9t^2}$ n'est pas majoré sur $\mathbb{R}^+$ et (4) n'a pas lieu pour $-\sigma$.

   (d) On a une équivalence à prouver.

   - On suppose que $\mathcal{N}$ est une entropie stricte du système (1). Soit $U_0 \in \mathbb{R}^d$, $U_0 \neq 0$; avec les calculs faits en question 1 on a alors $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $U(t) \neq 0$ et $\frac{(U(t)|AU(t))_{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}(U(t))} < 0$. Si on considère l'application $\Psi\ :\ X \in \mathbb{R}^d \mapsto \frac{(X|AX)_{\mathcal{N}}}{\mathcal{N}(X)^2}$ on a en particulier Ψ qui est strictement négative sur tout $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Or, Ψ est continue et la sphère unité de $\mathbb{R}^d$ est compacte donc Ψ atteint son maximum μ sur cette sphère et $\mu < 0$. On a alors

$$\forall X \neq 0,\ \Psi(X) = \Psi(X/\mathcal{N}(X)) \leq \mu$$

On en déduit que

$$\forall U_0 \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \frac{d}{dt}(\mathcal{N}(U(t))) \leq \mu \mathcal{N}(U(t))$$

On est dans le cadre de la question **9** de la partie 1 qui nous permet de conclure que

$$\forall U_0 \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \mathcal{N}(U(t)) \leq e^{\mu t} \mathcal{N}(U_0)$$

et ceci reste vrai si $U_0 = 0$ (U est alors nulle). L'inégalité (4) est ainsi vérifiée pour $\lambda = -\mu > 0$ et $C = 1$ (on sait que $U(t) = \exp(tA)U_0$)

- Réciproquement, on suppose que l'on peut trouver $\lambda > 0$ tel que

$$\forall U_0 \in \mathbb{R}^d,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \mathcal{N}(\exp(tA)U_0) \leq e^{-\lambda t} \mathcal{N}(U_0)$$

On fixe $U_0 \neq 0$. La solution de (1) associé à U_0 est $U(t) = \exp(tA)U_0$. La solution de (1) associée à $U(s) = \exp(sA)U_0$ est $V(t) = \exp(tA)U(s) = \exp(tA)\exp(sA)U_0$. Faire évoluer la solution d'un temps $s + t$ à partir du temps 0 ou la faire évoluer d'un temps s puis d'un temps t nous amène au même point et on a donc $V(t) = \exp((t + s)A)U_0$. Avec l'hypothèse faite, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \mathcal{N}(\exp(tA)V_0) \leq e^{-\lambda t} \mathcal{N}(V_0)$$

avec les considérations qui précèdent, ceci s'écrit

$$\forall s \in \mathbb{R}^+,\ \forall t \geq 0,\ \mathcal{N}(\exp((t + s)A)U_0) \leq e^{-\lambda t} \mathcal{N}(\exp(sA)U_0)$$

Soit $\Phi\ :\ t \mapsto e^{\lambda t} \mathcal{N}(U(t))$. L'identité précédente donne

$$\forall s \in \mathbb{R}^+,\ \forall t \geq 0,\ \Phi(s + t) \leq \Phi(s)$$

et Φ est donc décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs, Φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (puisque $U(t)$ ne s'annule pas avec la supposition $U_0 \neq 0$) et

$$\forall t \geq 0,\ \Phi'(t) = e^{\lambda t}(\lambda \mathcal{N}(U(t)) + \frac{d}{dt}\mathcal{N}(U(t)))$$

La décroissance de Φ donne alors $\frac{d}{dt}\mathcal{N}(U(t))) \leq \lambda \mathcal{N}(U(t))$ et cette quantité est < 0 ($U(t)$ est strictement positif et λ strictement négatif). $\mathcal{N}$ est une entropie stricte du système (1).

(e) Soient $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^d$. L'application $s \mapsto (\exp(sA)U_1, \exp(sA)U_2)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car $s \mapsto \exp(sA)$ l'est (l'énoncé admet même que c'est une application C^1 en question **4** de la partie 1).L e seul problème d'intérabilité est celui au voisinage de $+\infty$. Si on suppose le système irréversible bien orienté, on peut utiliser **4.a** avec le produit scalaire canonique et on trouver des constantes C et $\lambda > 0$ telles que

$$|(\exp(sA)U_1, \exp(sA)U_2)| \leq |\exp(sA)U_1|.|\exp(sA)U_2| \leq C^2 e^{-2\lambda s}|U_1||U_2|$$

Comme $\lambda > 0$, le majorant est négligeable devant $1/s^2$ au voisinage de $+\infty$ et notre fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. A fortiori, $(.,.)_{\mathcal{N}_A}$ est bien définie.

L'application $(.,.)_{\mathcal{N}_A}$ est symétrique et linéaire par rapport à sa seconde variable. Soit $U \in \mathbb{R}^d$ non nul. On a

$$(U,U)_{\mathcal{N}_A} = \int_0^{+\infty} |\exp(sA)U|^2\ ds \geq 0$$

Comme la quantité intégrée est continue et positive, l'intégrale n'est nulle que si pour tout $s \geq 0$, $\exp(sA)U = 0$ et donc (prendre $s = 0$) $U = 0$. L'application $(.,.)_{\mathcal{N}_A}$ est finalement un produit scalaire.
On a $\mathcal{N}_A(U(t))^2 = \int_0^{+\infty} |U(t+s)|^2\ ds = \int_t^{+\infty} |U(s)|^2\ ds$. $s \mapsto |U(s)|^2$ étant continue, le théorème fondamental indique que $t \mapsto \int_0^t |U(s)|^2\ ds$ est une primitive de $s \mapsto |U(s)|^2$. $t \mapsto \int_t^{+\infty} |U(s)|^2\ ds = \int_0^{+\infty} |U(s)|^2\ ds - \int_0^t |U(s)|^2\ ds$ se dérive donc en $t \mapsto -|U(t)|^2$. En dérivant initiale, on a alors

$$2\mathcal{N}_A(U(t))\frac{d}{dt}\mathcal{N}_A(U(t)) = -|U(t)|^2$$

Si $U_0 \neq 0$, $U(t)$ ne s'annule pas et reste > 0. On a alors $\frac{d}{dt}\mathcal{N}_A(U(t)) < 0$ et $\mathcal{N}_A$ est une entropie stricte du système (1).

5. On a ici

$$\mathcal{N}_A((x,y))^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2t}|(x+3ty,y)|^2\ dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t}(x^2+y^2+6txy+9t^2y^2)\ dt$$

On montre simplement (calcul direct pour la première intégrale, intégrations par parties pour les deux autres) que $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\ dt = \frac{1}{2}$, $\int_0^{+\infty} te^{-2t}\ dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-2t}\ dt = \frac{1}{4}$. On en déduit alors que

$$\mathcal{N}_A((x,y)) = \frac{\sqrt{11y^2+6xy+2x^2}}{2}$$

6. Pour tout réel t, $x \mapsto f(x,t)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dominée par $e^{-x^2/2}$ aux voisinages des infinis (car f, comme g, est bornée sur $\mathbb{R}$). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et on peut poser

$$H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\ dx$$

Pour étudier H au voisinage de $+\infty$, on utilise une caractérisation séquentielle. On se donne donc une suite (t_n) de limite $+\infty$ et on étudie la suite de terme général $H(t_n)$. Pour ce faire, on utilise le théorème de convergence dominée.

- Pour tout n, $h_n\ :\ x \mapsto f(x,t_n)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Commele système considéré est irréversible bien orienté toute solution est de limite nulle en $+\infty$ et donc $f(t_n,x) \to g(0) = 1$ quand $n \to +\infty$. (h_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ qui est elle même continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|h_n(t)| \leq \|g\|_\infty\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. Le majorant est indépendant de n et est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique et donne $H(t_n) \to \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\ dx = 1$. Ceci étant vrai pour toute suite (t_n) de limite infinie, on a finalement

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t)\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\ dx = 1$$

3 Matrices et hypocoercivité.

1. Soit $U_0 \neq 0$ et U la solution de (1) correspondante. On a vu en question **1** de la partie 2 que

$$\forall t \geq 0,\ \frac{d}{dt}|U(t)| = \frac{(U(t)|AU(t))}{|U(t)|}$$

- Si $|.|$ est une entropie de (1) alors ce qui précède donne, utilisé en $t = 0$, que $\forall U_0 \neq 0,\ (U_0|AU_0) \leq 0$ et ceci reste trivialement vrai pour $U_0 = 0$.
- Réciproquement, si $\forall X,\ (X|AX) \leq 0$ alors $\forall t \geq 0,\ \frac{d}{dt}|U(t)| \leq 0$ dans le cas $U_0 \neq 0$ et ceci reste vrai si $U_0 = 0$ (la solution est alors nulle).
- Si $|.|$ est une entropie stricte de (1) alors ce qui précède donne, utilisé en $t = 0$, que $\forall U_0 \neq 0,\ (U_0|AU_0) < 0$.
- Réciproquement, si $\forall X \neq 0,\ (X|AX) > 0$ alors $\forall t \geq 0,\ \frac{d}{dt}|U(t)| < 0$ dans le cas $U_0 \neq 0$.

Nous avons donc prouvé les deux équivalences demandées.

2. S est symétrique à valeurs propres strictement négatives. Il existe donc une base orthonormée $(e_1, \dots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$ constituée de vecteurs propres pour S et les valeurs propres associées $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont < 0. Si $X \in \mathbb{R}^d$ s'écrit $X = \sum_{i=1}^d x_i e_i$, on a alors

$$(SX|X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq 0$$

et ce terme n'est nul que si les x_i le sont tous c'est à dire si $X = 0$.
K est antisymétrique et donc $(KX|X) = (X|{}^tKX) = -(X|KX)$ ce qui indique que $(KX|X) = 0$.
On a finalement que

$$\forall X \neq 0,\ (AX|X) = (SX|X) + (KX|X) = (SX|X) < 0$$

et $|.|$ est une entropie stricte pour (1) d'après la question précédente.
Par le thorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}SP = D$ est diagonale (ses coefficients diagonaux sont les λ_i précédents). On a alors $P^{-1}AP = D + P^{-1}KP$ et $K' = P^{-1}KP$ est antisymétrique (car K l'est et $P^{-1} = {}^tP$). Les valeurs propres de A sont les mêmes que celles de $D + k'$. Soit λ une valeur propre de $D + K'$ et X un vecteur propre associé (le tout est complexe). On a

$$\lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = {}^t\overline{X}AX = {}^t\overline{X}DX + {}^t\overline{X}K'X = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 + {}^t\overline{X}K'X$$

$\alpha = {}^t\overline{X}K'X$ est une matrice de taille 1 égale à sa transposée $-{}^tXK'\overline{X} = -\overline{\alpha}$ (car $\overline{K'} = K'$). α est ainsi un complexe imaginaire pur (son conjugué est son opposé). La partie réelle de $\lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ est donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2$ et est < 0 (les λ_i le sont, les $|x_i|^2$ sont positifs et non tous nuls). Il en est de même pour la partie réelle de λ (car $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0$). A est donc à valeurs propres de parties réelles < 0 et le système associé à (1) est irréversible bien orienté.

3. On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est $x^2 + x + 1$ et dont les valeurs propres complexes sont donc j et j^2, dont la partie réelle vaut $-\frac{1}{2} < 0$. Le système (1) est alors irréversible bien orienté (partie 1) et admet en conséquence une entropie stricte (partie 2). On a

$$\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (AX|X) = -y^2 \leq 0$$

ce qui montre que $|.|$ est une entropie mais qu'elle n'est pas stricte (nullité de la quantité pour $X = (1, 0)$). On a donc montré que A est hypocoercive.

Pour le calcul de $\mathcal{N}_A$, on pourrait calculer les puissances de A pour en déduire $\exp(tA)$. On peut aussi exhiber la solution de (1). Soit $U = (x, y)$ cette solution avec $U_0 = (a, b)$. On a alors $x' = y$ et $y' = -x - y$ et donc $x'' = -x - y = -x' - x$ et de même $y'' = -x' - y' = -y - y'$. x et y sont des solutions de $f'' + f' + f = 0$ et $x(0) = a$, $x'(0) = y(0) = b$, $y(0) = b$ et $y'(0) = -a - b$. On sait résoudre ces problèmes de Cauchy pour des équations différentielles scalaires du second ordre à coefficients constants et on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \exp(tA)U_0 = U(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} a\cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{2b+a}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t/2) \\ b\cos(\sqrt{3}t/2) - \frac{b+2a}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t/2) \end{pmatrix}$$

On calcule la norme de ce vecteur et on intègre entre 0 et $+\infty$. On utilise les résultats suivants (obtenus avec la machine mais que l'on pourrait retrouver en linéarisant la partie trigonométrique et en l'interprétant comme partie réelle ou imaginaire d'une exponentielle complexe)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos^2(\sqrt{3}t/2)\,dt = \frac{5}{8},\ \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^2(\sqrt{3}t/2)\,dt = \frac{3}{8}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\sqrt{3}t/2)\sin(\sqrt{3}t/2)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Le calcul donne alors

$$\forall U_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathcal{N}_A(U_0) = \sqrt{\frac{12a^2 + 8b^2 + 8ab}{8}}$$

4. *Dans cette question et la suivante, il y a encore manifeste erreur d'énoncé ! En effet, $\lambda_i + 1$ est valeur propre de A pour $i \geq 3$ et comme on ne suppose que $\lambda_i < 0$, il peut y avoir des valeurs propres réelles positives et le système n'est alors pas irréversible bien orienté. Je fais donc l'hypothèse que $\forall i,\ \lambda_i < -1$ (et non pas < 0).*

   On peut écrire, par blocs, $A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1+\lambda_2 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(1 + \lambda_3, \dots, 1 + \lambda_d)$. Le polynôme caractéristique de A est alors (calcul de déterminant par blocs)

$$\chi_A = (-1)^d(x^2 - (\lambda_2 - 1)x + 1)(x - \lambda_3 - 1)\dots(x - \lambda_d - 1)$$

   Les valeurs propres de A sont les $\lambda_i + 1$ pour $i \in [3..d]$ et les racines de $x^2 - (\lambda_2 - 1)x + 1$. Le discriminant de ce polynôme est $(\lambda_2 - 3)(\lambda_2 + 1) > 0$ et ce polynôme admet deux racines réelles non nulles et de même signe (le produit vaut 1) et négatives (la somme vaut $\lambda_2 - 1 < 0$. Toutes les valeurs propres sont réelles négatives strictement et le système est irréversible bien orienté.

5. Il nous reste à montrer que $|.|$ est une entropie mais pas une entropie stricte. On se donne $X \in \mathbb{R}^d$. On a alors

$$(AX|X) = (\lambda_2 - 1)x_2^2 + \sum_{i=3}^{d}(1 + \lambda_i)x_i^2 \leq 0$$

   Pour $X = (1, 0, \dots, 0)$, on a une égalité et on a donc le résultat voulu.

6. Soit N une matrice nilpotente non nulle. Il existe un entier $k \geq 2$ tel que $N^{k-1} \neq 0$ et $N^k = 0$. Comme $N^{k-1} \neq 0$, il existe un vecteur x tel que $N^{k-1}(x) \neq 0$. Si on pose $e_2 = N^{k-2}(x)$ et $e_1 = N^{k-1}(x)$, on a alors $N(e_2) = e_1$ et $N(e_1) = 0$. On a alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (N(te_1 + e_2)|te_1 + e_2) = (e_1|te_1 + e_2) = t|e_1\|^2 + (e_1|e_2)$$

   Quand t varie dans $\mathbb{R}$, la quantité précédente décrit $\mathbb{R}$ (car $|e_1|^2 \neq 0$). A fortiori, on a

$$\{(NX|X)/\ X \in \mathbb{R}^d\} = \mathbb{R}$$

7. *Encore une erreur d'énoncé : pour $\kappa = \kappa_0$, l'énoncé impose que la norme euclidienne est une entropie stricte et aussi qu'elle ne l'est pas... Dans la première condition, il faut certainement lire une inégalité stricte.*
   Comme S est symétrique à valeurs propres < 0, ${}^tXSX$ est < 0 pour tout $X \neq 0$ (voir question **2** de cette partie). On peut définir $\theta \ : \ X \mapsto -\frac{{}^tXNX}{{}^tXSX}$ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On remarque que $\forall X \neq 0,\ \theta(X) = \theta(X/|X|)$ et que les valeurs prises par θ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ sont les mêmes que celles prises sur la sphère unité. Cette sphère est compacte et θ est continue. θ prend donc une valeur maximale M. On a $M > 0$ car ${}^tXNX$ n'est pas identiquement nul sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. On pose $\kappa_0 = \frac{1}{M} > 0$.
   On remarque par ailleurs que $\forall X,\ {}^tXKX = 0$ car K est antisymétrique (voir question 2) et que donc
   $$\forall X \in \mathbb{R}^d,\ (AX|X) = {}^tXSX + \kappa {}^tXNX$$
   - Si $\kappa < \kappa_0$ alors $\forall X \neq 0,\ \theta(X) \leq \frac{1}{\kappa_0}$ donne $\forall X \neq 0,\ (AX|X) < 0$ et $|.|$ est une entropie stricte.
   - Si $\kappa = \kappa_0$ alors il existe un X de la sphère unité tel que $\theta(X) = \frac{1}{\kappa}$ et alors $(AX|X) = 0$ ce qui montre que $|.|$ n'est pas une entropie stricte. C'est une entropie en reprenant le cas précédent avec des inégalités larges.
   - Si $\kappa > \kappa_0$ alors il existe un X de la sphère unité tel que $\theta(X) > \frac{1}{\kappa}$ et alors $(AX|X) > 0$ ce qui montre que $|.|$ n'est pas une entropie.
8. Soit A une matrice irréversible bien orientée. Soit σ le maximum des parties réelles des valeurs propres. σ est < 0.
   Il s'agit de montrer que si B est "proche" de A, elle a la même propriété. Ceci est raisonnabel car le polynôme caractéristique varie continûment en fonction des coefficients de la matrice et il doit en être de même des racines d'un polynôme en fonction des coefficients de ce dernier. Nous avons cependant peu d'outils pour mettre ce second point en place.
9. Soient $A, B \in E$ et $\lambda \in [0,1]$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^d$, on a
   $$((\lambda A + (1-\lambda)B)X|X) = \lambda(AX|X) + (1-\lambda)(BX|X) \leq 0$$
   ce qui montre que $\lambda A + (1-\lambda)B \in E$ et que E est convexe. La preuve est la même pour E^0 (pour $X \neq 0$, $(AX|X)$ et $(BX|X)$ sont < 0 et $\lambda, 1-\lambda$ sont positifs et l'un des deux l'est strictement).
   Soit (A_n) une suite d'éléments de E qui converge vers A. Pour tout $X \in \mathbb{R}^d$, $(A_nX|X) \leq 0$ donne, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ (et par théorèmes généraux, on ne fait que des sommes et produits) $(AX|X) \leq 0$ et donc $A \in E$. On a donc montré que E est un fermé.
   Soit $A \in E_0$. L'application $Y \mapsto -(AY|Y)$ est continue sur la sphère unité et donc atteint son minimum r sur ce compact. Comme $A \in E_0$, on a $r > 0$. Soit B telle que $|||B||| < r$. On a alors $\forall X \neq 0,\ ((A+B)X|X) = |X|^2((AY|Y) + (BY|Y))$ avec $Y = \frac{X}{|X|}$. Comme $|Y| = 1$, on a $(AY|Y) < -r$ et aussi $(BY|Y) \leq |BY|.|Y| \leq |||B|||\,.|Y|^2 = |||B||| < r$ et donc $((A+B)X|X) < 0$. La boule de centre A de rayon r (au sens de $|||.|||$) est donc incluse dans E^0 et cet ensemble est ouvert.
10.