CX0611

Banque commune **École Polytechnique – ENS de Cachan**

PSI

Session 2010

Épreuve de Mathématiques

Durée : 4 **heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de la calculatrice est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PRÉAMBULE

Dans ce problème, on désigne par $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels. On note $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}\backslash\{0\}$, $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbf{R}_- =]-\infty, 0]$ et $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$. On note $\mathbf{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

Si x est un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Pour tout couple (k, n) d'entiers supérieurs à 1, on notera $\mathcal{C}^k(\mathbf{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles sur $\mathbf{R}^n$ qui sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, on notera respectivement $D_1 f$ et $D_2 f$ les dérivées partielles de f par rapport à la première et la deuxième coordonnée. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, on utilisera, pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, la notation $D^2_{ij} f = D_i(D_j f)$. On a alors pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$ l'égalité $D^2_{ij} f = D^2_{ji} f$ sur l'ouvert où f est définie.

Pour la résolution du problème, on pourra utiliser sans démonstration tout théorème du programme qui semblera utile après s'être assuré explicitement que ses hypothèses sont vérifiées.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

Première partie

Soit c un nombre réel. On considère l'équation suivante :

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)\ ,\quad D_1 f + c D_2 f = 0. \tag{A}$$

1. a. Soit f une solution de l'équation (A). Montrer que pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbf{R}^2$, la fonction $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi(t) = f(t_0 + t, x_0 + ct)$ est constante. En déduire une expression de f en fonction de $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $u(x) = f(0, x)$.

1. b. À tout $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ on associe la fonction $E(u) : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$\forall (t, x) \in \mathbf{R}^2\ ,\quad E(u)(t, x) = u(x - ct).$$

Montrer que l'application linéaire E qui à u associe $E(u)$ envoie $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ dans $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Montrer que E est injective et que son image est l'ensemble des solutions de (A).

On note $q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $q(t, x) = x - ct$. Soit Ω une partie de $\mathbf{R}^2$.

2. a. On suppose que $\mathbf{R} \setminus q(\Omega)$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide. Montrer que tout élément de $\mathbf{R}$ est limite d'une suite d'éléments de $q(\Omega)$. En déduire que deux solutions de (A) qui coïncident en tout point de Ω sont égales.
2. b. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Montrer qu'il existe une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ qui est nulle hors de $]a, b[$ mais qui n'est pas identiquement nulle. *Indication : on pourra chercher une fonction dont la restriction à $[a, b]$ soit polynomiale.*
2. c. Montrer que si $\mathbf{R} \setminus q(\Omega)$ contient un intervalle ouvert non vide, alors il existe deux solutions distinctes de (A) qui coïncident sur Ω.

3. a. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Soient $s_1, \ldots, s_k$ des éléments deux à deux distincts de l'intervalle $[0, 1[$. Montrer qu'il existe i et j appartenant à $\{1, \ldots, k\}$ tels que $0 < |s_i - s_j| < \frac{1}{k-1}$.
3. b. Soit α un nombre irrationnel. Montrer que si m et n sont deux entiers relatifs distincts, alors $m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor \neq n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor$. En déduire que pour tout $r > 0$, l'ensemble $T = \{n_1\alpha + n_2 : (n_1, n_2) \in \mathbf{Z}^2\}$ contient deux éléments t_1 et t_2 tels que $0 < |t_1 - t_2| < r$, puis que $\mathbf{R} \setminus T$ ne contient aucun intervalle ouvert non vide.
3. c. Discuter, en fonction de la valeur de la constante c, l'existence de deux solutions distinctes de (A) qui coïncident sur $\mathbf{Z}^2$.

On suppose désormais $c \neq 0$. On considère l'équation suivante :

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)\ ,\quad D_{11}^2 f - c^2 D_{22}^2 f = 0. \tag{B}$$

Soit f une solution de (B).

4. a. On pose $g = D_1 f - c D_2 f$. Montrer qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ telle que $g(t, x) = u(x - ct)$.
4. b. Montrer qu'il existe une fonction $v \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ telle que la fonction $h = E(v)$ satisfasse l'équation $D_1 h - c D_2 h = g$.

4. c. Montrer qu'il existe des fonctions $v_+ \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ et $v_- \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ telles que $f(t,x) = v_+(x+ct) + v_-(x-ct)$, puis montrer que $v_+ \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R})$.
4. d. Énoncer un résultat analogue à celui établi à la question **1.** b. et le démontrer.

5. a. Montrer que si f_1 et f_2 sont deux solutions de (B) qui coïncident sur $\{0\} \times \mathbf{R}$ et qui sont telles que $D_1 f_1$ et $D_1 f_2$ coïncident sur $\{0\} \times \mathbf{R}$, alors $f_1 = f_2$. Montrer que cette conclusion n'est pas toujours vraie si l'on suppose seulement que f_1 et f_2 coïncident sur $\{0\} \times \mathbf{R}$.
5. b. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$ qui sont solution de (B) et qui satisfont $f(0,0) = 1$ et les conditions suivantes :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(0,x) = D_2 f(0,x) \text{ et } f(0,x) D_1 f(0,x) = c.$$

Deuxième partie

On considère l'équation suivante :

$$\Omega \text{ ouvert de } \mathbf{R}^2\ ,\quad f \in \mathcal{C}^1(\Omega)\ ,\quad D_1 f + f D_2 f = 0. \tag{C}$$

6. a. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^2$ et f une solution de (C) sur Ω. Soit (t_0, x_0) un point de Ω. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant t_0 et une fonction X de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $X(t_0) = x_0$ et telle que pour tout $t \in I$, on ait $(t, X(t)) \in \Omega$ et $X'(t) = f(t, X(t))$.
6. b. Montrer que la fonction $\psi : I \to \mathbf{R}$ définie par $\psi(t) = f(t, X(t))$ est constante. Décrire la nature géométrique de l'arc $(t, X(t))$.
6. c. Soit J un intervalle ouvert contenant t_0. Pour tout t appartenant à J, on pose $Z(t) = x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0)$. On suppose que pour tout $t \in J$, le point $(t, Z(t))$ appartient à Ω. On pose

$$T = \sup\{t \in J : \forall s \in [t_0, t[, f(s, Z(s)) = f(t_0, x_0)\}.$$

Montrer que $T > t_0$, puis que T n'appartient pas à J. *Indication : on pourra supposer le contraire et calculer* $f(T, Z(T))$. En déduire que T est la borne supérieure de J, puis que $f(t, Z(t)) = f(t_0, x_0)$ pour tout t dans J.

7. a. On suppose que $\Omega = \mathbf{R}^2$. Montrer que les seules solutions de (C) sont les fonctions constantes.
7. b. Déterminer toutes les fonctions de la forme $(t,x) \mapsto \frac{P(x)}{Q(t)}$, où P et Q sont des polynômes, qui sont solution de (C) sur leur ensemble de définition. Déterminer une solution non constante de (C) lorsque $\Omega = \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$.

8. a. On se donne une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ croissante. Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$ et tout $x \in \mathbf{R}$, il existe un unique réel $a(t,x)$ tel que $x = a(t,x) + t u(a(t,x))$.

On admettra pour tout le reste du problème que la fonction $a : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ainsi définie est continue, qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et que ses dérivées partielles sont données sur cet ouvert par les formules

$$\forall (t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R},\ D_1 a(t,x) = -\frac{u(a(t,x))}{1+tu'(a(t,x))}\ ,\quad D_2 a(t,x) = \frac{1}{1+tu'(a(t,x))}.$$

8. b. Montrer que la fonction $f : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(t,x) = u(a(t,x))$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, qu'elle est solution de (C) sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et vérifie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, l'égalité $f(0,x) = u(x)$. On notera $F(u)$ la fonction f ainsi construite à partir de u.
8. c. Montrer que si une fonction $g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et de plus est une solution de (C) sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, alors la fonction $v \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ définie par $v(x) = g(0,x)$ est croissante, et vérifie $g = F(v)$.

9. a. Soit u la fonction définie par $u(x) = x$. Déterminer $F(u)$ et comparer le résultat obtenu avec celui de la deuxième partie de la question **7.** b.
9. b. En considérant la fonction u définie par

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases},$$

déterminer une solution non constante de (C) sur l'ouvert $\Omega = \mathbf{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbf{R}_+)$.

Troisième partie

Soit $(c_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels telle que pour tout $n \geqslant 1$ on ait $|c_n| \leqslant \frac{1}{2n^2}$. On définit par récurrence une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de polynômes en posant $P_1 = c_1$ puis, pour tout $n \geqslant 2$,

$$P_n'(t) = -\frac{n}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P_k(t)P_{n-k}(t)\ ,\quad P_n(0) = c_n.$$

Dans ce qui suit, on pourra utiliser, sans les démontrer, les inégalités $e \geqslant 2$ et $e\sqrt{e} \geqslant 3$.

10. a. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer qu'on a l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2} + \frac{4}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

Indication : on pourra chercher une écriture plus simple de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x(n-x)}$.
10. b. Montrer que $2\ln n \leqslant n$, puis qu'on a l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(n-k)^2} \leqslant \frac{8}{n^2}.$$

10. c. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a l'inégalité

$$|P_n(t)| \leqslant \frac{1}{n^2}e^{8n|t|}.$$

10. d. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} P_n(t)x^n$ converge, pour (t,x) appartenant à un ouvert Ω contenant $(0,0)$ qu'on précisera, vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ qui satisfait l'équation

$$\forall (t,x) \in \Omega \ , \quad D_1 f(t,x) + x f(t,x) D_2 f(t,x) = 0. \tag{D}$$

11. a. On suppose $c_1 \neq 0$. Déterminer le degré de P_n pour tout $n \geqslant 1$. On pourra discuter selon le signe de c_1.

11. b. Pour tout $n \geqslant 1$, on note d_n le coefficient dominant de P_n. Établir une relation de récurrence satisfaite par la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$. Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par récurrence par $e_1 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 2 \ , \quad e_n = \sum_{k=1}^{n-1} e_k e_{n-k}.$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $|d_n| \leqslant e_n$.

11. c. On considère la série entière $H(s) = \sum_{n\geqslant 1} e_n s^n$ et on note R son rayon de convergence. Montrer que $R = \frac{1}{4}$. *Indication : on pourra commencer par supposer $R > 0$ et calculer, sous cette hypothèse, la valeur de H sur $]-R, R[$.*

11. d. Montrer que sur l'intervalle $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, la fonction $G(s) = \sum_{n\geqslant 1} d_n s^n$ est solution de l'équation différentielle

$$s y'(s)(1 + y(s)) - y(s) = 0. \tag{E}$$

11. e. Montrer que pour tout $s \in [-e^{-1}, +\infty[$, il existe un unique $w(s) \in [-1, +\infty[$ tel que $w(s)e^{w(s)} = s$. Montrer que la fonction w ainsi définie est solution de (E) sur $]-e^{-1}, +\infty[$. Exprimer en fonction de w une solution de (E) qui a même valeur et même dérivée en 0 que G.

FIN DE L'ÉPREUVE.