X-ENS PSI - 2009
Un corrigé

Première partie.

1. Des calculs élémentaires donnent

$$\chi_{A(\alpha)} = \chi_{B(\alpha)} = X^2 - X + 1 \ \text{ et } \ \chi_{A(\alpha)+B(\alpha)} = X^2 - 2X + 4\alpha^2 + 4$$

On en déduit que

$$\mathrm{Sp}(A(\alpha)) = \mathrm{Sp}(B(\alpha)) = \{j, j^2\} \ \text{ où } \ j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$\mathrm{Sp}(A(\alpha)+B(\alpha)) = \left\{1 + i\sqrt{3+4\alpha^2}, 1 - i\sqrt{3+4\alpha^2}\right\}$$

2. Quand α tend vers $+\infty$, les valeurs propres de $A(\alpha) + B(\alpha)$ ont un module de limite infinie alors que les valeurs propres de $A(\alpha)$ et $B(\alpha)$ ont un module qui reste égal à 1. On ne peut donc en général borner $\mathrm{Sp}(A + B)$ uniquement avec $\mathrm{Sp}(A)$ et $\mathrm{Sp}(B)$.

3.a) Soit $F \in \mathcal{E}_k$. On a

$$\dim(F) + \dim(\mathrm{Vect}(v_k, \dots, v_n)) = k + (n - k + 1) = n + 1$$

et les espace F et $\mathrm{Vect}(v_k, \dots, v_n)$ ne sont donc pas en somme directe. Leur intersection est ainsi un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ (et de dimension ≥ 1).

3.b) Soit $F \in \mathcal{E}_k$. D'après la question précédente, on peut trouver $x \neq 0$ dans F et dans $\mathrm{Vect}(v_k, \dots, v_n)$. La famille des v_i étant orthonormée, on a

$$x = \sum_{i=k}^{n} \langle v_i | x \rangle v_i \ \text{ et } \ x^*x = \|x\|^2 = \sum_{i=k}^{n} |\langle v_i | x \rangle|^2$$

et on en déduit (on utilise encore le caractère orthonormé) que

$$x^*AX = \langle x | Ax \rangle = \langle \sum_{i=k}^{n} \langle v_i | x \rangle v_i | \sum_{i=k}^{n} \langle v_i | x \rangle \lambda_i v_i \rangle = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i |\langle v_i | x \rangle|^2 \geq \lambda_k \sum_{i=k}^{n} |\langle v_i | x \rangle|^2 = \lambda_k x^*x$$

$x^*x = \|x\|^2$ étant > 0, on a donc

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} \geq \lambda_k$$

3.c) Choisissons $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$, qui est un élément de $\mathcal{E}_k$. Par un calcul similaire, on a

$$\forall x \in F, \ x^*AX = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |\langle v_i | x \rangle|^2 \leq \lambda_k x^*x$$

En divisant par x^*x pour $x \neq 0$ et en passant au maximum, on obtient

$$\sup_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x} \leq \lambda_k$$

Pour $x = v_k$, les inégalités sont des égalités. L'inégalité ci-dessus est donc une égalité et la borne supérieure un maximum :

$$\max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \lambda_k$$

3.d) Soit G un sous-espace de $\mathbb{C}^n$ de dimension ≥ 1. On a

$$\forall x \in G \setminus \{0\}, \ \frac{x^* AX}{x^* x} = y^* Ay \ \text{ avec } \ y = \frac{x}{\|x\|}$$

Quand x varie dans $G \setminus \{0\}$, y varie dans $\{z \in G / \ |z\| = 1\}$ qui est un compact de $\mathbb{C}^n$ (fermé et borné). Comme $\phi \ : \ z \mapsto z^* Az$ est continue, elle est bornée sur ce compact et atteint ses bornes. On en déduit l'existence de

$$\max_{x \in G \setminus \{0\}} \frac{x^* AX}{x^* x}$$

D'après la question 3.b. on a

$$\forall F \in \mathcal{E}_k, \ \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* Ax}{x^* x} \geq \lambda_k$$

puisqu'il existe au moins un x d'un F donné quelconque dans $\mathcal{E}_k$ tel que le quotient soit plus grand que λ_k. On peut alors passer à la borne inférieure pour obtenir

$$\inf_{F \in \mathcal{E}_k} \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* Ax}{x^* x} \geq \lambda_k$$

Par ailleurs, la question 3.c montre qu'il existe un F de $\mathcal{E}_k$ pour lequel on a une égalité. Ainsi, l'inégalité précédente est une égalité et on a un minimum :

$$\min_{F \in \mathcal{E}_k} \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{x^* Ax}{x^* x} = \lambda_k$$

3.e) *On note que $A + B$ est hermitienne et que l'on peut lui appliquer ce qui précède.*
$k \in \{1, \dots, n\}$ est ici fixé.

- Soit $F \in \mathcal{E}_k$ quelconque. 3.b. donne un élément non nul x de $\mathcal{E}_k$ et on a

$$\max_{z \in F \setminus \{0\}} \frac{z^*(A+B)z}{z^* z} \geq \frac{x^*(A+B)x}{x^* x} = \frac{x^* Ax}{x^* x} + \frac{x^* Bx}{x^* x} \geq \lambda_k(A) + \frac{x^* Bx}{x^* x}$$

  Mais un calcul similaire à celui de 3.b (en décomposant x sur une b.o.n. $(w_1, \dots, w_n)$ de vecteurs propres de B) donne $\frac{x^* Bx}{x^* x} \geq \lambda_1(B)$. On a donc

$$\max_{z \in F \setminus \{0\}} \frac{z^*(A+B)z}{z^* z} \geq \lambda_k(A) + \lambda_1(B)$$

  Ceci est vrai pour tout choix de F dans $\mathcal{E}_k$. En passant au minimum, et avec la question précédente, on a donc

$$\lambda_k(A+B) \geq \lambda_k(A) + \lambda_1(B)$$

- De façon semblable,

$$\lambda_k(A) \geq \lambda_k(A+B) + \lambda_1(-B)$$

  Or, les valeurs propres de $-B$ sont les opposées de celles de B et $\lambda_1(-B) = -\lambda_n(B)$. Ainsi

$$\lambda_k(A) + \lambda_n(B) \geq \lambda_k(A+B)$$

On a ainsi prouvé que

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$$

Deuxième partie.

4.a) Notons $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique (orthonormée) de $\mathbb{C}^n$. On a alors

$$\forall i\in\{1,\dots,n\},\ \frac{e_i^*Ae_i}{e_i^*e_i}=a_{i,i}\in\mathcal{V}(A)$$

4.b) Soit $z\in\mathcal{V}(H(A))$; il existe $x\in\mathbb{C}^n$ non nul tel que

$$z=\frac{x^*H(A)x}{x^*x}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^*Ax}{x^*x}+\frac{x^*Ax}{x^*x}\right)$$

En remarquant que $x^*A^*x=(Ax)^*x=\langle Ax|x\rangle=\overline{\langle x|Ax\rangle}=\overline{x^*Ax}$ on en déduit (on utilise aussi $x^*x\in\mathbb{R}$) que

$$z=\mathrm{Re}\left(\frac{x^*Ax}{x^*x}\right)\in\mathrm{Re}(\mathcal{V}(A))$$

Réciproquement, soit $z\in\mathrm{Re}(\mathcal{V}(A))$. Il existe $x\in\mathbb{C}^n$ non nul tel que $z=\mathrm{Re}\left(\frac{x^*Ax}{x^*x}\right)$. Le même calcul donne alors $z=\frac{x^*H(A)x}{x^*x}\in\mathcal{V}(H(A))$.
On a prouvé que

$$\mathcal{V}(H(A))=\mathrm{Re}(\mathcal{V}(A))$$

4.c) Soit $z\in\mathcal{V}(A+B)$. Il existe $x\in\mathbb{C}^n$ non nul tel que

$$z=\frac{x^*(A+B)x}{x^*x}=\frac{x^*Ax}{x^*x}+\frac{x^*Bx}{x^*x}\in\mathcal{V}(A)+\mathcal{V}(B)$$

On a prouvé que

$$\mathcal{V}(A+B)\subset\mathcal{V}(A)+\mathcal{V}(B)$$

4.d) Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre (donc non nul) associé. On a

$$\frac{x^*Ax}{x^*x}=\frac{\langle x|Ax\rangle}{x^*x}=\frac{\langle x|\lambda x\rangle}{x^*x}=\lambda$$

et donc $\lambda\in\mathcal{V}(A)$. Ceci montre que

$$\mathrm{Sp}(A)\subset\mathcal{V}(A)$$

4.e) On combine les deux questions précédentes :

$$\mathrm{Sp}(A+B)\subset\mathcal{V}(A+B)\subset\mathcal{V}(A)+\mathcal{V}(B)$$

4.f) Notons $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Soit $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ non nul. On a

$$\frac{x^*Ax}{x^*x}=\frac{\sum_{i=1}^n\lambda_i|x_i|^2}{\sum_{i=1}^n|x_i|^2}$$

Les λ_i étant des réels ordonnés (multiplier par $|x_i|^2\geq 0$ ne change pas le signe des inégalités) on a alors

$$\lambda_1\leq\frac{x^*Ax}{x^*x}\leq\lambda_n$$

De plus, si $z\in[\lambda_1,\lambda_n]$ alors il existe $t\in[0,1]$ tel que $z=t\lambda_1+(1-t)\lambda_n$. En choisissant $x=(\sqrt{t},0,\dots,0,\sqrt{1-t})$ on a alors $\frac{x^*Ax}{x^*x}=z$.
On a ainsi montré (par double inclusion) que

$$\mathcal{V}(\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n))=[\lambda_1,\lambda_n]$$

4.g) Supposons U unitaire. On a donc

$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ (Ux)^*(Ux) = x^*(U^*U)x = x^*x$$

Soit $z \in \mathcal{V}(U^*AU)$; il existe x non nul tel que

$$z = \frac{x^*U^*AUx}{x^*x} = \frac{y^*Ay}{y^*y} \quad \text{avec} \quad y = Ux$$

et on a donc

$$\mathcal{V}(U^*AU) \subset \mathcal{V}(A)$$

Comme U^{-1} est aussi unitaire (avec $(U^{-1})^* = (U^*)^{-1}$), on a aussi

$$\mathcal{V}(A) = \mathcal{V}((U^{-1})^*U^*AUU^{-1}) \subset \mathcal{V}(U^*AU)$$

et on a donc l'égalité annoncée.

4.h) Soit A hermitienne et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (qui sont réelles et que l'on peut ordonner). Par le théorème T et les question f et g, on a $\mathcal{V}(A) = [\lambda_1, \lambda_n]$ et ainsi

$$\mathcal{V}(A) = [\min \mathrm{Sp}(A), \max \mathrm{Sp}(A)]$$

4.i) On procède comme en début de question 3.d. On a

$$\forall x \neq 0,\ \frac{x^*AX}{x^*x} = y^*Ay \quad \text{avec} \quad y = \frac{x}{\|x\|}$$

Quand x varie dans $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, y varie dans $\{z \in \mathbb{C}^n/\ |z\| = 1\}$ qui est un compact de $\mathbb{C}^n$ (fermé et borné). Comme $\phi\ :\ z \mapsto z^*Az$ est continue, l'image d'un compact par ϕ est un compact. Ainsi, $\mathcal{V}(A)$ est une partie compacte de $\mathbb{C}$.

5.a) Supposons A nilpotente. Il existe m tel que X^m annule A. Or, toute valeur propre est racine d'un polynôme annulateur et 0 est donc la seule valeur propre possible. Comme dans $\mathbb{C}$ il y a au moins une valeur propre alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
Réciproquement, si 0 est la seule valeur propre complexe de A alors $\chi_A = (-1)^n X^n$ (tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$). Comme ce polynôme annule A (théorème de Cayley-Hamilton), $A^n = 0$ et A est nilpotente.

5.b)

i) Si $\mathcal{V}(A) = \{0\}$ alors (question 4.d) $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$ et comme il y a au moins une valeur propre cette inclusion est une égalité. Avec 5.a on en déduit que A est nilpotente.

ii) On remarque tout d'abord que par théorème du rang (et compte-tenu de la relation sur la dimension de l'orthogonal)

$$\dim(\ker(A)) = \dim(\mathrm{im}(A)^\perp)$$

On choisit d'écrire l'image de A sous la forme $\mathrm{im}(A)$ *avec une minuscule pour éviter toute confusion ultérieure avec une partie imaginaire.*
Ainsi, il nous suffit de prouver une inclusion pour conclure, par dimension, à l'égalité des ensembles. On remarque, comme $\mathcal{V}(A) = \{0\}$, que

$$\forall z \neq 0,\ z^*Az = 0$$

l'égalité restant vraie si $z = 0$. Soit alors $x \in \ker(A)$; on a

$$\forall y \in \mathbb{C}^n,\ 0 = (x+y)^*A(x+y) = (x+y)^*Ay = x^*Ay$$

On a donc x orthogonal à tout élément de l'image de A c'est à dire $\ker(A) \subset \mathrm{im}(A)^\perp$, ce que l'on voulait prouver.

iii) Avec la question 4.b, on a $\mathcal{V}(H(A)) = \{0\}$. $H(A)$ est donc une matrice nilpotente. Or, elle est hermitienne et donc diagonalisable par le théorème T. C'est une matrice diagonalisable dont 0 est l'unique valeur propre, c'est donc la matrice nulle. On a ainsi $A^* = -A$ et A est anti-hermitienne. Le même théorème T indique que A est diagonalisable, et comme elle est nilpotente on peut, comme pour $H(A)$ conclure à sa nullité.

Remarque : ce n'est certainement pas la méthode attendue puisque l'on n'utilise pas la question ii). On peut envisager une méthode alternative. Supposons, par l'absurde, que $A \neq 0$. $\mathrm{im}(A)$ *est alors un sous-espace de dimension* ≥ 1 *stable par l'endomorphisme* a *canoniquement associé à* A. a *induit sur* $\mathrm{im}(A)$ *un endomorphisme* $\tilde{a}$ *qui admet, puisque l'on est sur* $\mathbb{C}$, *une valeur propre* μ. *On doit avoir* $\mu = 0$ *(car* μ *est aussi valeur propre de* A *et car* A *est nilpotente) et un élément du sous-espace propre associé est dans* $\mathrm{im}(a)$ *et* $\ker(a)$ *et est donc nul. On a ainsi une contradiction.*

Troisième partie.

6.a) On a ici une matrice à "diagonale dominante". Supposons, par l'absurde, qu'elle soit non inversible et notons x un élément non nul de son noyau. Il existe un indice i tel que $|x_i|$ soit maximal. La nullité de la i-ième coordonnée de Ax donne

$$a_{i,i}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$$

En passant au module, et avec l'inégalité triangulaire, on en déduit que

$$|a_{i,i}||x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}||x_j|$$

Comme $\forall j,\ |x_j| \leq |x_i|$ et $|x_i| > 0$, on obtient (en divisant par $|x_i|$) que

$$|a_{i,i}| \leq L_i(A)$$

ce qui contredit l'hypothèse faite par l'énoncé. On a ainsi montré que A est inversible.

6.b) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$; $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible et donc pas "à diagonale dominante". Ainsi,

$$\exists\, i/\ |a_{i,i} - \lambda| \leq L_i(A)$$

ce qui indique que $\lambda \in G(A)$. Comme A et ${}^tA$ ont même spectre, on a aussi $\lambda \in G({}^tA)$ et on a finalement montré que

$$\mathrm{Sp}(A) \subset G(A) \cap G({}^tA)$$

7.a) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de convexes et C l'intersection de tous les C_i. Soient $x_1,\ x_2 \in C$ et $t \in [0,1]$. Pour tout i, $x_1, x_2 \in C_i$ et C_i est convexe donc $tx_1 + (1-t)x_2 \in C_i$. Cet élément est ainsi dans C (il est dans tous les C_i) et C est convexe.

7.b) Notons $\mathcal{C}_X$ l'ensemble de tous les convexes contenant X (il y a au moins $\mathbb{C}^n$) et

$$\mathrm{Conv}(X) = \bigcap_{C \in \mathcal{C}_X} C$$

Cet ensemble est un convexe (question précédente) et elle est incluse, par définition, dans tout convexe qui contient X. C'est donc le plus petit (au sens de l'inclusion) convexe qui contient X.

7.c) Posons

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i /\ n \geq 1,\ \{x_1, \dots, x_n\} \subset X,\ \forall i,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

- Il est évident que S contient X (pour $x \in X$, prendre $n=1$, $x_1 = x$ et $t=1$). Soient $x, x' \in S$; on peut trouver un $n \geq 1$ ($m \geq 1$), des x_i (x'_i) dans X, des t_i (et t'_i) positifs dont la somme vaut 1 tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \quad \text{et} \quad x' = \sum_{i=1}^{m} t'_i x_i$$

Si $u \in [0,1]$ alors

$$ux + (1-u)x' = \sum_{i=1}^{m+n} t''_i y_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall i \in [1,n],\ y_i = x_i,\ t''_i = t_i \\ \forall i \in [n+1, n+m],\ y_i = x'_{i-n},\ t''_i = t'_{i-n} \end{cases}$$

Les t''_i sont positifs de somme 1 et les y_i sont dans X. Ainsi, $ux + (1-u)x' \in S$ et S est convexe. S étant UN convexe contenant X, on a

$$\mathrm{Conv}(X) \subset S$$

- Réciproquement, tous les élement de X sont dans $\mathrm{Conv}(X)$ et cet ensemble est convexe et contient donc tous les barycentres d'éléments de X à coefficients positifs. Ainsi, $S \subset \mathrm{Conv}(X)$.

Par double inclusion, on a prouvé que $S = \mathrm{Conv}(X)$.

7.d) L'application $z \mapsto |z|$ étant continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ elle est bornée et atteint ses bornes sur le convexe C. Il existe donc $z_0 \in C$ de module minimal.
Supposons que z_0 et z_1 soient deux éléments de C de module minimal. Comme C est convexe, $\frac{1}{2}(z_0 + z_1) \in C$ et, par minimalité

$$\frac{1}{2}|z_0 + z_1| \geq |z_0| = \frac{1}{2}(|z_0| + |z_1|)$$

On est donc dans un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire et z_0 et z_1 ont donc même argument. Comme ils ont même module, ils sont égaux. On a donc

$$\exists\, !z_0 \in C / \ |z_0| = \min_{z \in C} |z|$$

7.e) Soit D la médiatrice du segment $[0, z_0]$. Comme $z_0 \neq 0$, cette droite est bien définie et ne passe pas par l'origine. Elle délimite $\mathbb{C}$ en deux demi-plans Π^+ (qui contient 0) et Π^- (qui contient z_0).

- Montrons que K est strictement inclus dans le plan Π^-.
  Supposons, par l'absurde, que l'on puisse trouver $z \in \Pi^+ \cap K$. On a $|z| \geq |z_0|$ (car $|z_0|$ est de module minimal dans K). Le segment $[z_0, z]$ coupe le cercle de centre 0 de rayon $|z_0|$ mais n'est pas tangent à ce cercle ; il recoupe le cercle en un point autre z_1 que z_0. K étant convexe $z_1 \in K$ et $|z_1| = |z_0|$ contredit l'unicité de z_0.
- D à une équation du type $a\mathrm{Re}(Z) + b\mathrm{Im}(z) + c = 0$ et, quitte à multiplier par -1, on peut supposer $c \leq 0$. Comme 0 n'est pas sur la droite, on a $c \neq 0$ et donc $c < 0$. Π^+ correspond alors à $a\mathrm{Re}(ez) + b\mathrm{Im}(z) + c \leq 0$. Tous les éléments z de K vérifient donc $a\mathrm{Re}(z) + b\mathrm{Im}(z) + c > 0$.

7.f) On doit prouver une équivalence.

- Supposons qu'il existe θ réel tel que $e^{i\theta}K \subset P$. K ne contient pas l'origine (car sinon on aurait $0 = e^{i\theta}0 \in P$ ce qui est faux).
- Réciproquement, supposons que K (supposé convexe et fermé) ne contient pas 0. La question précédente donne a, b et c avec $c < 0$ et $(a,b) \neq (0,0)$ (sinon, on n'a pas une droite). Quitte à diviser par $\sqrt{a^2+b^2}$, on peut supposer $a^2 + b^2 = 1$. Il existe alors θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = -\sin(\theta)$. Pour tout $z \in K$, on a

$$\mathrm{Re}(ze^{i\theta}) = \cos(\theta)\mathrm{Re}(z) - \sin(\theta)\mathrm{Im}(z) > -c > 0$$

  Ainsi $e^{i\theta}K \subset P$.

8.a) $G_{\mathcal{V}}(A)$ est un convexe (c'est une enveloppe convexe) fermé (admis par l'énoncé). Il ne contient pas 0 si et seulement s'il existe θ réel tel que $e^{i\theta}G_{\mathcal{V}}(A) \subset P$.

Soit $z \in G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A)$; d'après la question 7.c, il existe $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in A$, $t_1, \dots, t_n \geq 0$ de somme 1 tels que

$$z = \sum_{k=1}^{n} t_k(e^{i\theta}x_k) = e^{i\theta}\sum_{k=1}^{n} t_k x_k \in e^{i\theta}G_{\mathcal{V}}(A)$$

Réciproquement, si $z \in e^{i\theta}G_{\mathcal{V}}(A)$ on montre de même que $z \in G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A)$. Finalement, les ensembles sont égaux.

Ainsi, $G_{\mathcal{V}}(A)$ ne contient pas 0 si et seulement s'il existe θ réel tel que $G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A) \subset P$

8.b) On doit prouver une équivalence.

- Supposons que $\forall i,\ \mathrm{Re}(a_{i,i}) > E_i(A)$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ vérifiant $|z - a_{j,j}| \leq E_j(A)$; on a alors $\mathrm{Re}(a_{j,j}) - \mathrm{Re}(z) \leq |\mathrm{Re}(z - a_{j,j})| \leq |z - a_{j,j}| \leq E_j(A)$ et donc $\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Re}(a_{j,j}) - E_j(A) > 0$.
  Soit $z \in G_{\mathcal{V}}(A)$; z est une combinaison convexe de z_k ayant la propriété précédente c'est à dire dans P. Comme P est convexe, z est aussi dans P et on a $G_{\mathcal{V}}(A) \subset P$.
- Réciproquement, supposons $G_{\mathcal{V}}(A) \subset P$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$; $a_{i,i} - E_i(A) \in G_{\mathcal{V}}(A)$ (il est dans l'un des ensembles dont $G_{\mathcal{V}}(A)$ est l'enveloppe convexe de la réunion). On a donc $\mathrm{Re}(a_{i,i} - E_i(A)) > 0$ et ainsi $\mathrm{Re}(a_{i,i}) > E_i(A)$.

8.c) On a

$$L_i(H(A)) = \sum_{j \neq i} \left| \frac{a_{i,j} + \overline{a_{j,i}}}{2} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|) = E_i(A)$$

De plus, les coefficients diagonaux de $H(A)$ sont les $\mathrm{Re}(a_{i,i})$.

Soit λ une valeur propre de $H(A)$. $H(A) - \lambda I_n$ n'est pas inversible et avec la question 6 on a l'existence d'un i tel que $|\mathrm{Re}(a_{i,i}) - \lambda| \leq L_i(H(A)) \leq E_i(A)$. Ainsi,

$$\mathrm{Re}(a_{i,i}) - \mathrm{Re}(\lambda) \leq |\mathrm{Re}(a_{i,i}) - \lambda| \leq E_i(A)$$

et donc $\mathrm{Re}(\lambda) \geq \mathrm{Re}(a_{i,i}) - E_i(A)$. Avec la question précédente, cette quantité est > 0. On a ainsi

$$\mathrm{Sp}(H(A)) \subset P$$

Avec la question 4.h, on a donc $\mathcal{V}(H(A)) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et avec 4.b on en déduit que $\mathrm{Re}(\mathcal{V}(A)) \subset \mathbb{R}^{+*}$ c'est à dire que tous les éléments de $\mathcal{V}(A)$ ont une partie réelle > 0 c'est à dire

$$\mathcal{V}(A) \subset P$$

8.d) Supposons que $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A)$. 8.$a$ donne un réel θ tel que $G_{\mathcal{V}}(e^{i\theta}A) \subset P$. 8.$c$ donne alors $\mathcal{V}(e^{i\theta}A) \subset P$. Comme $\mathcal{V}(e^{i\theta}A) = e^{i\theta}\mathcal{V}(A)$ (quasi-immédiat) et comme $0 \notin P$, on a donc $0 \notin e^{i\theta}\mathcal{V}(A)$ et finalement $0 \notin \mathcal{V}(A)$.

8.e) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; posons $B = A - \lambda I_n$. On a $E_i(B) = E_i(A)$ (dans le calcul, les coefficients diagonaux n'interviennent pas). On a aussi l'équivalence

$$|z - b_{i,i}| \leq E_i(B) \iff |(z + \lambda) - a_{i,i}| \leq E_i(A)$$

et on prouve ainsi aisément (tout est transformé par translation et l'enveloppe convexe du translaté est le translaté de l'enveloppe convexe) que

$$z \in G_{\mathcal{V}}(B) \iff z + \lambda \in G_{\mathcal{V}}(A)$$

Ainsi, si $\mu \notin G_{\mathcal{V}}(A)$, $0 \notin G_{\mathcal{V}}(A - \mu I_n)$ et donc (question précédente) $0 \notin \mathcal{V}(A - \mu I_n)$. Il reste à remarquer (immédiat avec la définition) que $\mathcal{V}(A - \mu I_n) = \mathcal{V}(A) - \mu$ pour conclure que $\mu \notin \mathcal{V}(A)$. En contraposant, on obtient

$$\mathcal{V}(A) \subset G_{\mathcal{V}}(A)$$

Quatrième partie.

9.a) Soit $x \in \mathbb{C}^n$ non nul et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a

$$\|Mx\| = \|x\|\|M\frac{x}{\|x\|}\| \leq |||M|||\,\|x\|$$

inégalité qui reste vraie pour $x = 0$ et que l'on utilisera dans la suite.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^n$ de norme 1. On a

$$\|ABx\| \leq |||A|||\,\|Ax\| \leq |||A|||\,|||B|||\,\|x\| = |||A|||\,|||B|||$$

En passant à la borne supérieure sur les x, on en déduit que

$$|||AB||| \leq |||A|||\,|||B|||$$

9.b) A^*A est une matrice hermitienne et on peut donc trouver une b.o.n. $(v_1, \dots, v_n)$ formée de vecteurs propres pour cette matrice. De plus, les valeurs propres associée sont réelles et on peut, quitte à renuméroter, les supposer ordonnées : $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Enfin,

$$0 \leq \langle Av_i | Av_i \rangle = v_i^* A^* A v_i = v_i^*(\lambda_i v_i) = \lambda_i$$

montre que les valeurs propres sont positives.
Soit $x \in \mathbb{C}^n$ de norme 1 ; il s'écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ avec $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$ et on a

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax | Ax \rangle = x^* A^* A x = \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|^2 \leq \lambda_n$$

En passant à la racine carrée (opération croissante) puis à la borne supérieure sur x, on obtient $|||A|||_2 \leq \sqrt{\lambda_n}$. Cette inégalité est une égalité car pour $x = v_n$, les inégalités précédentes sont des égalités (et on a donc un maximum). On a donc

$$|||A|||_2 = \sqrt{\max \mathrm{Sp}(A^*A)}$$

9.c)

i) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et x un vecteur propre associé. On a

$$r(A) \geq \frac{x^*Ax}{x^*x} = \frac{\lambda x^* x}{x^* x} = \lambda$$

Ceci étant vrai pour toute valeur propre λ, on en déduit que

$$\rho(A) \leq r(A)$$

ii) Soit z tel qu'il existe un j avec $|z - a_{j,j}| \leq E_j(A)$. On a alors

$$|z| \leq |a_{j,j}| + E_j(A) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n (|a_{k,j}| + |a_{j,k}|) \leq M = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|)$$

Un élément de $\mathcal{V}(A)$ est (question 8.e)) dans $G_{\mathcal{V}}(A)$ et est donc combinaison convexe d'éléments du type précédents et donc d'éléments dans la boule de centre 0 de rayon M. Comme cette boule est convexe, notre élément lui appartient. On a montré ainsi que tout élément de $\mathcal{V}(A)$ est de module inférieur ou égal à M. En passant à la borne supérieure, on obtient

$$r(A) \leq M = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (|a_{i,j}| + |a_{j,i}|)$$

iii) Avec les formules admises par l'énoncé, on a

$$\forall i,\ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(|a_{i,j}|+|a_{j,i}|)\le \frac{|||A|||_1+|||A|||_\infty}{2}$$

En passant au maximum sur i, la question précédente donne $r(A)\le \frac{|||A|||_1+|||A|||_\infty}{2}$. L'autre inégalité a été prouvée en $c.i$).

10.a) r est bien définie et est positive. Si $r(A)=0$ alors $\mathcal{V}(A)=0$ et 5.b) montre que $A=0$ (axiome de séparation). Si $x\in\mathbb{C}^n$ est non nul,

$$\left|\frac{x^*(A+B)x}{x^*x}\right|\le\left|\frac{x^*Ax}{x^*x}\right|+\left|\frac{x^*Bx}{x^*x}\right|\le r(A)+r(B)$$

En passant à la borne supérieure sur x, on a donc $r(A+B)\le r(A)+r(B)$ (inégalité triangulaire). On a aussi, pour $\lambda\in\mathbb{C}$,

$$\left|\frac{x^*(\lambda A)x}{x^*x}\right|=|\lambda|\left|\frac{x^*Ax}{x^*x}\right|$$

Comme λ est une constante, le passage au maximum donne $r(\lambda x)=|\lambda)r(x)$ (homogénéité). r est ainsi une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

10.b) Soit $x=(a,b)\neq(0,0)$; on a

$$\frac{x^*Ax}{x^*x}=\frac{2\overline{a}b}{|a|^2+|b|^2},\ \frac{x^*Bx}{x^*x}=\frac{2a\overline{b}}{|a|^2+|b|^2}$$

- $\left|\frac{2\overline{a}b}{|a|^2+|b|^2}\right|\le 1$ car $2|a||b|\le|a|^2+|b|^2$. Ainsi, $\mathcal{V}(A)$ est inclus dans le disque unité. En choisissant $a=re^{2i\theta}$ et $b=e^{i\theta}$, on a

$$\forall r\in\mathbb{R},\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ \frac{2r}{1+r^2}e^{i\theta}\in\mathcal{V}(A)$$

Quand θ et r varient dans $\mathbb{R}$, la quantité précédente décrit le disque unité. On a finalement

$$\mathcal{V}(A)=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|=1\}$$

- De façon similaire,

$$\mathcal{V}(B)=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|=1\}$$

- On en déduit que

$$\mathcal{V}(A)\mathcal{V}(B)=\{z\in\mathbb{C}/\ |z|=1\}$$

- $AB=\mathrm{diag}(4,0)$ et donc

$$\mathcal{V}(AB)=[0,4]$$

On a $r(AB)=4$ et $r(A)r(B)=1$ ce qui montre que r n'est pas une norme matricielle.

10.c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x\neq 0,\ \left|\frac{x^*Ax}{x^*x}\right|=\frac{|\langle x|Ax\rangle|}{\|x\|_2}\le\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\le|||A|||_2$$

En passant à la borne supérieure sur x, on a donc

$$r(A)\le|||A|||_2$$

Si A est hermitienne alors $|||A|||_2=\sqrt{\max\mathrm{Sp}(A^*A)}=\sqrt{\max\mathrm{Sp}(A^2)}$ (question 9.b)). A étant diagonalisable, les valeurs propres de A^2 sont les carrés de celles de A et donc

$$|||A|||_2=\max\{|\lambda|/\ \lambda\in\mathrm{Sp}(A)\}$$

Par ailleurs (toujours quand A est hermitienne), la question 4.h) donne $r(A)=\max\{|z|/\ z\in[\min\mathrm{Sp}(A),\max\mathrm{Sp}(A)]\}=\max\{|\lambda|/\ \lambda\in\mathrm{Sp}(A)\}$. On a donc l'égalité $r(A)=|||A|||_2$ dans ce cas.

Si A est antihermitienne, iA est hermitienne et $r(iA)=|||iA|||_2$ donne encore $r(A)=|||A|||_2$.

10.d) Avec la décomposition donnée et l'inégalité triangulaire, on a

$$|||A|||_2 \leq \left|\left|\left|\frac{A+A^*}{2}\right|\right|\right|_2 + \left|\left|\left|\frac{A-A^*}{2}\right|\right|\right|_2$$

Avec la question précédente (en vérifiant que $\frac{A+A^*}{2}$ est hermitienne et $\frac{A-A^*}{2}$ anti-hermitienne) on en déduit que

$$|||A|||_2 \leq r\left(\frac{A+A^*}{2}\right) + r\left(\frac{A+A^*}{2}\right)$$

r étant une norme, on a alors (inégalité triangulaire et homogénéité)

$$|||A|||_2 \leq r(A) + r(A^*)$$

On remarque enfin que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ x^*A^*x = (Ax)^*x = \overline{x^*AX}$$

En divisant par x^*x pour x non nul, en pasant au module puis à la borne supérieure sur x, on en déduit que $r(A) = r(A^*)$. Finalement, on a

$$|||A|||_2 \leq 2r(A)$$

10.e) On a ainsi, pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$4r(AB) \leq 4\,|||AB|||_2 \leq 4\,|||A|||_2\,|||B|||_2 \leq 4(2r(A))(2r(B)) = (4r(A))(4r(B))$$

Comme $4r$ est évidemment une norme, c'est bien une norme matricielle.

10.f) De façon similaire, on a $cr(AB) \leq 4cr(A)r(B)$. Si $c \geq 4$ alors $4c \leq c^2$ et donc $cr(AB) \leq (cr(A))(cr(B))$. Comme $c > 0$, cr est une norme et donc aussi une norme matricielle.
Réciproquement, supposons que $c \in]0, 4[$. cr est une norme dont nous pouvons montrer qu'elle n'est pas matricielle. Il suffit de considérer les matrices A et B dont les coefficients sont tous nuls sauf $a_{1,2}$ et $b_{2,1}$ qui valent 2 (on suppose donc que $n \geq 2$). On a alors $AB = \mathrm{diag}(4, 0, \ldots, 0)$ et donc $r(AB) = 4$. Un calcul similaire à celui de 10.a) montre aussi que $r(A) \leq 1$ et $r(B) \leq 1$. On a donc $cr(AB) = 4c > c^2 \geq cr(A)cr(B)$.