X-ENS PSI 2007
un corrigé

Première partie.

1.1. $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ et on montre par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f^{(k)} : x \mapsto \frac{(k-1)!(-1)^{k-1}}{(1+x)^k}$$

f étant idéfiniment dérivable en 0, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à tout ordre au voisinage de 0 pour obtenir (compte-tenu de $f(0)=0$)

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \frac{n!(-1)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt$$

En appliquant ceci en $x=1$, on a donc

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{n}\right| \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt \leq \int_0^1 (1-t)^n\, dt = \frac{1}{n+1}$$

On a donc

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \zeta_a(1)$$

1.2. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Soit $n_0 = E(1/\varepsilon)$; on a $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1$ et donc $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$. L'inégalité précédente donne alors

$$\left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n_0} \frac{(-1)^{k-1}}{n}\right| \leq \varepsilon$$

Le calcul de la somme du membre de gauche donne une valeur approchée de $\ln(2)$ à ε près.

1.3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a

$$\forall k \geq 1,\ \forall x \in [k,k+1],\ \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

En intégrant ces inégalités puis en sommant les résultats obtenus, il vient

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 1,\ 0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \leq 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$$

1.4. On forme la différence

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

Or, par concavité de ln sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a

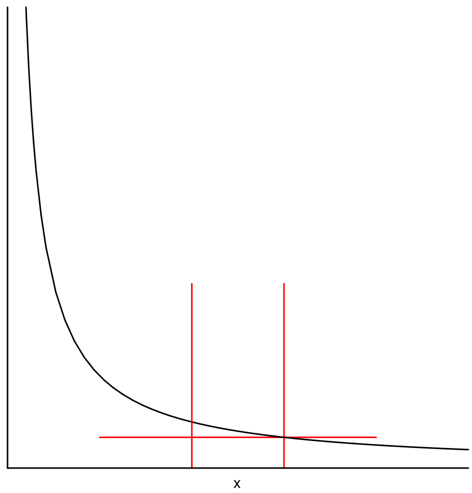
$$\forall u > -1,\ \ln(1+u) \leq u$$

On en déduit (avec $u = -1/n+1$) que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n \leq 0$$

La suite (u_n) est decroissante et minorée (par 0). Elle est donc convergente.

1.5. On trace le graphe de la fonction $x \mapsto 1/x$ ainsi que les droites d'équation $x = n$, $x = n+1$ et $y = \frac{1}{n+1}$. Le domaine cherché est le domaine borné délimité par ces courbes.



L'aire de D_n est la différence de l'aire sous la branche d'hyperbole et de celle sous la droite $y = \frac{1}{n+1}$:

$$\text{aire}(D_n) = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} - \frac{1}{n+1} = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = u_n - u_{n+1}$$

en utilisant l'expression obtenue auparavant pour la différence $u_{n+1} - u_n$.

1.6. Le calcul de D_n peut aussi se faire avec une intégrale double :

$$\text{aire}(D_n) = \iint_{D_n} dx\, dy = \int_n^{n+1} \left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{x}} dy \right) dx = \int_n^{n+1} \frac{n+1-x}{x(n+1)}\, dx$$

Un encadrement grossier donne

$$\forall x \in [n, n+1],\ \frac{n+1-x}{(n+1)^2} \leq \frac{n+1-x}{x(n+1)} \leq \frac{n+1-x}{n(n+1)}$$

En intégrant ces ingélités, on a donc

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq \left[-\frac{(n+1-x)^2}{2(n+1)^2} \right]_n^{n+1} \leq \text{aire}(D_n) \leq \left[-\frac{(n+1-x)^2}{2n(n+1)} \right]_n^{n+1} = \frac{1}{2n(n+1)}$$

Le majorant vaut $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. Le minorant est plus grand que $\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ c'est à dire que $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$. On a donc

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \leq \text{aire}(D_n) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

1.7. En sommant les inégalités précédente, on a donc

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) \leq \sum_{k=n}^{N} (u_k - u_{k+1}) \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Les terme se télescopant, ceci se simplifie en

$$\frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(N+2)} \leq u_n - u_{N+1} \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(N+1)}$$

En passant à la limite $N \to +\infty$, on a donc

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2n}$$

On réordonne cette double inégalité pour obtenir

$$u_n - \frac{1}{n} \leq \gamma \leq u_n - \frac{1}{2(n+1)} = u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}$$

1.8. Si on sait que $\gamma \in [a,b]$ alors $\frac{a+b}{2}$ fournit une approximation de γ à $\frac{b-a}{2}$ près. La question précédente indique que $u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n(n+1)}$ fournit une approximation de γ à $\frac{1}{4n(n+1)}$ près. Si on veut une approximation à ε près, il suffit de choisir n tel que $n^2 \geq \frac{1}{4\varepsilon}$.

Deuxième partie.

2.1. f_a est dérivable sur $]a,+\infty[$ et

$$\forall x > a,\ f_a'(x) = h\left(\frac{a}{x}\right)\exp\left(x\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)\right) \quad \text{avec} \quad h(u) = \ln(1-u) + \frac{u}{1-u}$$

h est dérivable sur $[0,1[$ et

$$\forall u \in [0,1[,\ h'(u) = \frac{u}{(1-u)^2} \geq 0$$

h est donc croissante sur $[0,1[$. Comme $h(0)=0$, h est positive sur $[0,1[$. On en déduit que f' est positive sur $]a,+\infty[$ et que f est donc croissante sur cet ensemble.
Comme $\ln(1-u) \sim -u$ au voisinage de $+\infty$, on a

$$x\ln\left(1-\frac{a}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -a$$

La fonction exponentielle étant continue en $-a$, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty}\exp\left(x\ln\left(1-\frac{a}{x}\right)\right) = e^{-a}$$

2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $t \mapsto f_t(n)\ln(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$ est continue sur $]0,n]$ (ou continue sur $]0,n[$ et prolongeable par continuité en n par la valeur 0). La fonction équivaut en 0 à $\ln(t)$ et est donc négligeable (croissances comparées) devant $1/\sqrt{t}$. Cette fonction est donc intégrable sur $[0,n]$ et son intégrale, I_n, est bien définie.
$g : t \mapsto e^{-t}\ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. g présente des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $+\infty$.

- $g(t) \sim_0 \ln(t) = o(1/\sqrt{t})$ (croissances comparées) et g est donc intégrable au voisinage de 0.
- $g(t) = o_{+\infty}(1/t^2)$ (croissances comparées) et g est donc intégrable au voisinage de $+\infty$.

g est finalement intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale, I, existe a fortiori sur $\mathbb{R}^+$.

2.3. On peut écrire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_{\mathbb{R}^+} g_n(t)\,dt \quad \text{avec} \quad g_n(t) = \begin{cases} f_t(n)\ln(t) & \text{si } t \in]0,n[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour calculer la limite de (I_n), on utilise le théorème de convergence dominée. On commence par en vérifier les hypothèses.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue par morceaux (et même continue) sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Soit $t > 0$; pour n suffisamment grand, $g_n(t) = f_t(n)\ln(t) \to e^{-t}\ln(t) = g(t)$ quand $n \to +\infty$. La suite (g_n) est donc simplement convergente sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers g et g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

- D'après la question 2.1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,n[, 0 \leq f_t(n) \leq \lim_{+\infty} f_t = e^{-t}$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,n[,\ |g_n(t)| \leq e^{-t}|\ln(t)|$$

La majoration est encore trivialement vraie si $t \geq n$ ($g_n(t)$ est alors nul). La fonction majorante est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (vu en question 2.2).

Le théorème de convergence dominée s'applique et donne

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} g(t)\, dt = I$$

2.4. Le changement de variable $u = t/n$ donne

$$I_n = n\int_0^1 (1-u)^n \ln(nu)\, du = n\ln(n)\int_0^1 (1-u)^n\, du + n\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)\, du$$

Comme $u \mapsto -\frac{1}{n+1}(1-u)^{n+1}$ est une primitive de $u \mapsto (1-u)^n$, le premier terme du membre de droite vaut $\frac{n}{n+1}\ln(n)$.
$u \mapsto -\frac{1}{n+1}\left((1-u)^{n+1}-1\right)$ est une primitive de $u \mapsto (1-u)^n$. Une intégration par parties donne

$$\forall a \in]0,1],\ \int_a^1 (1-u)^n \ln(u)\, du = \left[-\frac{1}{n+1}\left((1-u)^{n+1}-1\right)\ln(u)\right]_a^1 + \frac{1}{n+1}\int_a^1 \frac{\left((1-u)^{n+1}-1\right)}{u}\, du$$

Le terme "tout intégré" est nul en 1 et tend vers 0 quand $a \to 0$ (on a le produit de $\ln(u)$ par un polynôme en u dont 0 est racine et on obtient le résultat par croissances comparées). En utilisant la factorisation $x^{n+1}-1 = (x-1)(x^n+\cdots+1)$, l'intégrale du membre de doite vaut

$$\sum_{k=0}^n \int_a^1 -(1-u)^k\, du = -\sum_{k=0}^n \left[-\frac{(1-u)^{k+1}}{k+1}\right]_a^1$$

Il n'y a pas de problème pour faire tendre a vers 0 et cela donne

$$\int_0^1 (1-u)^n \ln(u)\, du = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}$$

En réunissant tout cela, on a finalement

$$I_n = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$

Comme $\frac{n}{n+1} \to 0$, un passage à la limite donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\, dt = I = \lim_{n\to+\infty} I_n = -\gamma$$

2.5. $t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité en 0 par la valeur 1. Cette fonction est donc intégrable sur tout segment $[0,x]$ avec $x > 0$ et $F(x)$ existe (c'est même une intégrale non "généralisée" d'une fonction continue sur un segment).
La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et négligeable (croissances comparées) devant $1/t^2$ au voisinage de $+\infty$. Pour tout $x > 0$, c'est donc une fonction intégrable sur $[x,+\infty[$ et $R(x)$

existe.
Soit $x>0$; la relation de Chasles donne

$$\gamma=-\int_0^x e^{-t}\ln(t)\,dt-\int_x^{+\infty}e^{-t}\ln(t)\,dt$$

On va opérer une intégration par parties dans chaque intégrale. Il faut pour cela se ramener à un segment où les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ par le biais de “bornes flottantes”. Dans les deux cas, on primitivera $t\mapsto e^{-t}$; la première fois, la primitive utilisée sera $t\mapsto -(e^{-t}-1)$ et la seconde fois ce sera $t\mapsto -e^{-t}$. On obtient

$$\forall a\in]0,x],\ \int_a^x e^{-t}\ln(t)\,dt=-\left[(e^{-t}-1)\ln(t)\right]_a^x+\int_a^x\frac{e^{-t}-1}{t}\,dt$$

$$\forall b>x\ \int_x^b e^{-t}\ln(t)\,dt=\left[-e^{-t}\ln(t)\right]_x^b+\int_x^b\frac{e^{-t}}{t}\,dt$$

Avec les primitives choisies, les différents termes admettent une limite quand $a\to 0$ et $b\to+\infty$. Après passage à la limite et simplifications, on obtient

$$\gamma=-R(x)+F(x)+(e^{-x}-1)\ln(x)-e^{-x}\ln(x)=-R(x)+F(x)-\ln(x)$$

2.6. D'après le développement en série entière de la fonction exponentielle, on a

$$\forall t\in\mathbb{R}^*,\ \frac{1-e^{-t}}{t}=\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}t^{k-1}$$

Pour tout $k\geq 1$, $h_k : t\mapsto\frac{(-1)^{k-1}}{k!}t^{k-1}$ est une fonction continue sur $[0,x]$ ($x>0$ étant fixé) et $\|h_k\|_{\infty,[0,x]}\leq\frac{x^{k-1}}{k!}$ est le terme général d'une série convergente. $\sum(h_k)$ est ainsi normalement convergente sur le segment $[0,x]$. On est dans le cas simple où l'interversion somme-intégrale est licite. Elle donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{(-1)^{k-1}}{k!}t^{k-1}\,dt=\int_0^x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}t^{k-1}\,dt$$

ce qui s'écrit aussi

$$\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k.k!}=\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}\,dt=F(x)$$

2.7. Soient $x>0$ et $N>x$; posons $u_n=\frac{x^n}{n.n!}$. On a alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{nx}{(n+1)^2}$$

Si $n\geq N>x$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1$. La suite $(u_n)_{n\geq N}$ est ainsi décroissante. Comme $((-1)^n u_n)$ est une suite alternée de limite nulle, la règle spéciale (utilisable à partir du rang N) indique que

$$\left|\sum_{k\geq N}(-1)^k u_k\right|\leq|u_N|$$

Avec la question précédente, on a donc

$$\left|F(x)-\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k.k!}\right|\leq\frac{x^N}{N.N!}$$

Nous n'obtenons pas l'inégalité demandée et il convient donc de poursuivre la majoration. On remarque que

$$\frac{x^N}{N.N!} = \frac{1}{eN}\left(\frac{ex}{N}\right)^N \frac{N^N e}{N! e^N}$$

On pourra conclure si l'on montre que $\frac{N^N}{N!}\frac{e}{e^N} \le 1$. Il nous reste donc à montrer que

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{N}{ek} \le \frac{1}{e}$$

Par croissance de la fonction exponentielle, il suffit donc de montrer que

$$\sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{N}{ek}\right) \le -1$$

ou encore que

$$(*)\ :\ \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{k}{N}\right) \ge 1 - N$$

La fonction $x \mapsto \ln(e.x)$ étant croissante sur $]0,1]$, on a

$$\forall k \in [2..N],\ \forall t \in \left[\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right],\ \ln(t) \le \ln\left(\frac{k}{N}\right)$$

Pour $k = 1$, l'inégalité est encore valable (il faut juste ouvrir l'intervalle en la borne 0). En intégrant ces inégalités (pour $k = 1$, il faut remarquer que $t \mapsto \ln(e.t)$ est intégrable au voisinage de 0) et en les sommant, on a donc

$$-1 = \int_0^1 \ln(e.t)\, dt \le \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\frac{k}{N}\right)$$

Si $N \ge 2$, on a $-1 \ge 1 - N$ et on obtient le résultat voulu.
Si $N = 1 > x > 0$, on a la majoration voulue dès le début de la question (par $|u_1|$). On a ainsi prouvé que

$$\forall x < N,\ \left| F(x) - \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k.k!} \right| \le \frac{1}{eN}\left(\frac{ex}{N}\right)^N$$

Remarque : il y a certainement plus simple, mais j'ai essayé de traiter la question comme il m'a semblé "naturel" de le faire au vu de l'énoncé....
Par ailleurs, $\forall t \ge x,\ 0 \le \frac{e^{-t}}{t} \le \frac{e^{-t}}{x}$ (e^{-t} étant positif). En intégrant cette inégalité entre x et $+\infty$ (les inétgrales existent bien) on obtient

$$0 \le R(x) \le \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-t}\, dt = \frac{e^{-x}}{x}$$

2.8. Soit $x > 0$ fixé. Pour $N > x$, on a

$$\left| \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k.k!} - \ln(x) + \gamma \right| = |R(x) + \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k.k!} - F(x)| \le \frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{eN}\left(\frac{ex}{N}\right)^N$$

Fixons $\varepsilon > 0$; on choisit $x \ge 1$ tel $e^{-x} \le \frac{\varepsilon}{2}$, par exemple $x = \max(1, \ln(2/\varepsilon))$, et on a alors $\frac{e^{-x}}{x} \le e^{-x} \le \frac{\varepsilon}{2}$.
Ce x étant fixé, on s'impose de prendre $N \ge 2ex \ge 2e$; on a alors $\frac{ex}{N} \le \frac{1}{2}$ et donc aussi $\frac{1}{eN}\left(\frac{ex}{N}\right)^N \le \frac{1}{2e^2}\left(\frac{1}{2}\right)^N$. Pour N plus grand que $-\log_2(e^2\varepsilon)$, le majorant est plus petit que $\varepsilon/2$.
Pour ce choix de x et N, on a donc

$$\left| \sum_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k.k!} - \ln(x) + \gamma \right| \le \varepsilon$$

Troisième partie.

3.1. Pour $s \leq 0$, $((-1)^{n-1}/n^s)$ ne converge pas vers 0 et la série associée diverge grossièrement. Pour $s > 0$, $(1/n^s)$ est une suite décroissante, positive, de limite nulle et donc $\sum((-1)^{n-1}/n^s)$ est une série alternée convergente. Ainsi,

$$D(\zeta_a) =]0, +\infty[$$

Posons $g_n : s \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$. (g_n) est une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par utilisation de la règle spéciale,

$$\forall a > 0,\ \forall s \in [a, +\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k\geq n} g_k(s)\right| \leq |g_n(s)| \leq \frac{1}{n^a}$$

Le majorant est indépendant de n et est de limite nulle quand $n \to +\infty$. $\sum(g_n)$ est donc uniformément convergente sur tout ensemble du type $[a, +\infty[$ et donc a fortiori sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$. La somme ζ_a de la série est donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3.2. g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall s > 0,\ g_n'(s) = (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^s}$$

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^s}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et sa dérivée, $t \mapsto \frac{1-s\ln(t)}{t^{x+1}}$ est négative pour $t \geq e^{k/x}$. $(|g_n'(s)|)$ est ainsi décroissante (de limite nulle) à partir du rang $n_s = E(e^{k/s}) + 1$. $\sum(g_n'(s))$ étant alternée, c'est une série convergente et d'après le théorème sur les restes de séries alternées,

$$\forall s > 0,\ \forall n \geq n_s,\ \left|\sum_{k=n}^{\infty} g_k'(s)\right| \leq |g_n'(x)|$$

En particulier, on a ($s \mapsto n_s$ décroît)

$$\forall a > 0,\ \forall s \geq a,\ \forall n \geq n_a,\ \left|\sum_{k=n}^{\infty} g_k'(s)\right| \leq \frac{\ln(n)}{n^s} \leq \frac{ln(n)}{n^a}$$

Le majorant trouvé tend vers 0 indépendamment de s et on a donc convergence uniforme de $\sum(g_n')$ sur $[a, +\infty[$. Comme on a aussi convergence simple de $\sum(g_n)$ sur le même ensemble, le cours indique que ζ_a est dérivable sur $]0, , +\infty[$ et

$$\forall s > 0,\ \zeta_a'(s) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{ln(n)}{n^s}$$

3.3. Soit $s > 1$; en séparant les termes d'indices pair et impair, on obtient

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{(2p+1)^s} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^s}$$

On complète la première somme du membre de droite en ajoutant les termes d'indices pairs (que l'on doit donc aussi retirer une fois) :

$$\forall n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = \sum_{p=1}^{2n} \frac{1}{p^s} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^s} - \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^s}$$

Les différents termes admettent une limite quand $n \to +\infty$ (car $s > 1$). Après passage à la limite, on obtient

$$\zeta_a(s) = \zeta(s) - \frac{2}{2^s}\zeta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

3.4. Par relation de Chasles, on a

$$s\int_1^{+\infty}\frac{E(t)}{t^{s+1}}\,dt = s\sum_{n=1}^{+\infty}\int_n^{n+1}\frac{n}{t^{s+1}}\,dt$$

Avec l'indication de l'énoncé, on écrit que

$$s\int_n^{n+1}\frac{n}{t^{s+1}}\,dt = s\left(\int_n^{+\infty}\frac{1}{t^{s+1}}\,dt - \int_{n+1}^{+\infty}\frac{1}{t^{s+1}}\,dt\right) = \frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}$$

On a finalement

$$s\int_1^{+\infty}\frac{E(t)}{t^{s+1}}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

On peut scinder la somme de droite en deux parties ($s>1$ suffit à assurer la convergence des sommes écrites). Un changement d'indice ($k=n+1$) dans la seconde donne alors

$$s\int_1^{+\infty}\frac{E(t)}{t^{s+1}}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^s}-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k-1}{k^s}$$

On regroupe les termes d'indices ≥ 2 pour obtenir

$$s\int_1^{+\infty}\frac{E(t)}{t^{s+1}}\,dt = 1+\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^s} = \zeta(s)$$

3.5. Il s'agit de montrer que

$$(**)\ :\ \lim_{s\to 1^+}\left(\zeta(s)-\frac{1}{s-1}\right)=\gamma$$

On est tenté d'utiliser l'expression obtenue pour $\zeta(s)$ à la question précédente. Pour interpréter la quantité $\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$ il est donc "naturel" de chercher une expression de $\frac{1}{s-1}$ sous forme d'intégrale. On a pour cela

$$\int_1^{+\infty} t^s\,dt = \frac{1}{s-1}$$

Il semble plus interessant de commencer par former

$$\zeta(s)-\frac{s}{s-1} = s\int_1^{+\infty}\frac{E(t)-t}{t^{s+1}}\,dt$$

Comme $\frac{s}{s-1}=1+\frac{1}{s-1}$, montrer $(**)$ revient à montrer que

$$(**)'\ :\ \lim_{s\to 1^+}\int_1^{+\infty}\frac{E(t)-t}{t^{s+1}}\,dt = \gamma-1$$

Pour tout $s>0$, la fonction $t\mapsto\frac{E(t)-t}{t^{s+1}}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$. Pour tout $t\geq 1$, $s\mapsto\frac{E(t)-t}{t^{s+1}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Enfin, pour tout $a>0$ on a

$$\forall s\geq a,\ \forall t\geq 1,\ \left|\frac{E(t)-t}{t^{s+1}}\right|\leq\frac{1}{t^{a+1}}$$

et la fonction majorante est intégrable sur $[1,+\infty[$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres indique que $s\mapsto\int_1^{+\infty}\frac{E(t)-t}{t^{s+1}}\,dt$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi, $(**)'$ équivaut à

$$(**)''\ :\ \int_1^{+\infty}\frac{E(t)-t}{t^2}\,dt = \gamma-1$$

Pour relier les deux membre, il est naturel de faire apparaître une somme de série dans le membre de gauche. On écrit que

$$\int_1^{+\infty} \frac{E(t)-t}{t^2}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{n-t}{t^2}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)\right)$$

Comme on ne peut séparer la somme en deux (séries divergentes), on revient à des sommes partielles :

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} - \ln(N+1) = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} - \ln(N+1) - 1$$

Quand $N \to +\infty$, cette quantité tend vers $\gamma - 1$ et on obtient $(**)''$. On a ainsi prouvé que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

3.6. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1-\ln(x)}{x^2}$. Cette dérivée est négative sur $[e, +\infty[$ et $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est donc décroissante sur cet ensemble. La suite $\left(\frac{\ln(n+3)}{n+3}\right)$ est donc décroissante (car $e \leq 3$) et elle est de limite nulle (croissances comparées). La série de terme général $(-1)^n \frac{\ln(n+3)}{n+3}$ est donc celui d'une série alternée qui vérifie la règle spéciale. Cette série est donc convergente.

Utilisons la relation de la question 3.3 en posant $u = s - 1$:

$$\forall u > 0,\ \zeta(u+1) = \zeta_a(1+u)\frac{2^u}{2^u - 1}$$

ζ_a étant dérivable en 1, on a

$$\zeta_a(1+u) = \zeta_a(1) + u\zeta_a'(1) + o_0(u)$$

De plus,

$$\frac{2^u}{2^u-1} = 1 + \frac{1}{2^u - 1} = 1 + \frac{1}{uln(2)} \frac{1}{1 + \frac{uln(2)}{2} + o(u)} = \frac{1}{uln(2)} + \frac{1}{2} + o_0(1)$$

On en déduit que

$$\zeta(u+1) = \frac{\zeta_a(1)}{ln(2)}\frac{1}{u} + \left(\frac{\zeta_a(1)}{2} + \frac{\zeta_a'(1)}{ln(2)}\right) + o_0(1)$$

Compte tenu de $\zeta_a(1) = ln(2)$ (question 1.1), on a

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \left(\frac{ln(2)}{2} + \frac{\zeta_a'(1)}{ln(2)}\right) + o_1(1)$$

Grâce à la question précédente, on en déduit que

$$\frac{ln(2)}{2} + \frac{\zeta_a'(1)}{ln(2)} = \gamma$$

Compte-tenu de l'expression de ζ_a', on a

$$S = -\sum_{n\geq 3} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n} = -\left(\zeta_a'(1) - \frac{\ln(2)}{2}\right)$$

L'expression trouvée pour γ devient alors

$$\gamma = \frac{\ln(2)+1}{2} - \frac{1}{\ln(2)}S$$

Quatrième partie.

4.1. Il s'agit d'un généralisation du théorème de Césaro. On va utiliser une méthode de preuve similaire. Soit $\varepsilon > 0$; comme (a_n) est de limite nulle, il existe un rang n_0 à partir duquel $|a_k| \leq \varepsilon$. La suite de terme général $\frac{\lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_{n_0-1} a_{n-0-1}}{\lambda_0 + \cdots + \lambda_n}$ est de limite nulle (le numérateur est constant et le dénominateur de limite infinie puisque terme général d'une suite croissante et divergente). Il existe donc un rang $n_1 \geq n_0$ à partir duquel ce terme est en module plus petit que ε. On a alors, pour $n \geq n_1$,

$$\left| \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k a_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k} \right| \leq \left| \frac{\sum\limits_{k=0}^{n_0-1} \lambda_k a_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k} \right| + \frac{\sum\limits_{k=n_0}^{n} \lambda_k |a_k|}{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k} \leq \varepsilon \left(1 + \frac{\sum\limits_{k=n_0}^{n} \lambda_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k} \right) \leq 2\varepsilon$$

Par définition des limites, ceci signifie que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k a_k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k} = 0$$

4.2. On prouve par récurrence que la propriété

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (\Delta^n u)_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i}$$

est vraie pour tout entier n.

- Le résultat est vrai au rang 0 ($\forall k,\ (\Delta^0 u)_k = u_k$).
- Soit $n \geq 0$ tel que le résultat soit vérifié jusqu'au rang n. On a alors pour tout entier k

$$(\Delta^{n+1} u)_k = (\Delta^n u)_k - (\Delta^n u)_{k+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i} - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+1+i}$$

On fait le changement d'indice $j = i+1$ dans la seconde somme puis on regroupe les termes de mêmes indices pour obtenir

$$(\Delta^{n+1} u)_k = u_k + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) u_{k+i} - (-1)^n u_{k+1+n}$$

D'après la relation dans le triangle de Pascal, $\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$. En outre, $u_k = \binom{n+1}{0} u_{k+0}$ et $u_{k+1+n} = \binom{n+1}{n+1} u_{k+n+1}$. Les termes se regroupent donc pour donner la formule au rang $n+1$.

4.3. n étant fixé, $(\Delta^n a)_k$ est ainsi une suite d'un nombre constant (indépendant de k) de termes tous de limite nulle quand $k \to +\infty$ (car (a_p) est de limite nulle et donc pour tout i, $a_{k+i} \to 0$ quand $k \to +\infty$).
On fixe maintenant k. D'après la formule de la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left| \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} |a_{k+i}|$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe un rang n_0 à partir duquel $|a_n| \leq \varepsilon$. En découpant la somme, on a alors

$$\forall n \geq n_0,\ \left| \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n_0-1} \binom{n}{i} |a_{k+i}| + \frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{i=n_0}^{n} \binom{n}{i}$$

Comme $\sum_{i=n_0}^{n} \binom{n}{i} \le \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$, le second terme du membre de droite est inférieur à ε. On remarque que $\binom{n}{i} \le n^i$ et que a est bornée (suite convergente ; on note M un majorant de $|a_p|$ pour $p \in \mathbb{N}$). On a alors

$$0 \le \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n_0-1} \binom{n}{i} |a_{k+i}| \le \frac{n^{n_0-1}}{2^n} n_0 M$$

Par croissances comparées, le terme est de limite nulle et donc plus petit que ε pour n assez grand, $n \ge n_1$. On a ainsi

$$\forall n \ge \max(n_0, n_1), \quad \left| \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} \right| \le 2\varepsilon$$

Par définition des limites, on a donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} = 0$$

Remarque : on ne peut utiliser directement 4.1 *car les coefficients λ_i qu'il faudrait introduire dépendent de n...*

4.4. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. On a (télescopage)

$$\sum_{n=0}^{N} a_n^{(k)} = (-1)^k \left(\frac{(\Delta^0 a)_k}{2^0} - \frac{(\Delta^{N+1} a)_k}{2^{N+1}} \right)$$

D'après la question précédente, ce terme amet une limite quand $N \to +\infty$. $\sum (a_n^{(k)})_n$ est donc convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k \frac{(\Delta^0 a)_k}{2^0} = (-1)^k a_k$$

Fixons maintenant $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $(\Delta^{n+1} a)_k = (\Delta^n a)_k - (\Delta^n a)_{k+1}$ on a

$$a_n^{(k)} = \frac{(-1)^k}{2^{n+1}} \left((\Delta^n a)_k + (\Delta^n a)_{k+1} \right)$$

On somme ces relations pour $k = 0, \dots, K$ et on scinde la somme en deux :

$$\sum_{k=0}^{K} a_n^{(k)} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(\sum_{k=0}^{K} (-1)^k (\Delta^n a)_k + \sum_{k=0}^{K} (-1)^k (\Delta^n a)_{k+1} \right)$$

On fait le changement d'indice $j = k + 1$ dans la seconde somme et on regroupe les termes d'indices communs pour obtenir (télescopage)

$$\sum_{k=0}^{K} a_n^{(k)} = \frac{1}{2^{n+1}} \left((\Delta^n a)_0 + (-1)^K (\Delta^n a)_{K+1} \right)$$

D'après la question précédente, ce terme amet une limite quand $N \to +\infty$. $\sum (a_n^{(k)})_k$ est donc convergente et

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n^{(k)} = \frac{(\Delta^n a)_0}{2^{n+1}}$$

4.5. On montre par récurrence que la proposition

la série $\sum (r_m^{(k)})_k$ converge

est vraie pour tout m.

- On a $r_0^{(k)} = (-1)^k a_k$ d'après la question précédente. $\sum(r_0^{(k)})_k$ est donc convergente et sa somme R_0 est égale à S.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $m \geq 0$. On a

$$r_{m+1}^{(k)} = r_m^{(k)} - a_m^{(k)}$$

qui est la différence des termes généraux de séries convergente (par hypothèse de récurrence et avec la question précédente). $\sum(r_{m+1}^{(k)})_k$ converge. De plus, avec les notations de l'énoncé, on a

$$R_{m+1} = R_m - \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}$$

4.6. Quand on somme les relations obtenues à la question précédente, un télescopage s'opère et on obtient

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = \sum_{m=0}^{n}(R_m - R_{m+1}) = R_0 - R_{n+1} = S - R_{n+1}$$

En reprenant le premier calcul de la question 4.4 j'obtiens

$$r_m^{(k)} = \sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k \frac{(\Delta^m a)_k}{2^m}$$

On a donc (avec l'expression obtenue en question 4.2)

$$R_m = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} a_{k+i} \right)$$

Pour tout i, $((-1)^k a_{k+i})$ est une suite alternée qui vérifie les hypothèses de la règle spéciale et sa série est donc convergente. Dans l'expression de R_m, on peut donc permuter les sommes (si $\sum(a_k)$ et $\sum(b_k)$ convergent alors $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$) :

$$R_m = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_{k+i}$$

D'après la règle spéciale, $\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_{k+i}\right| \leq |a_i|$ et ainsi

$$|R_m| \leq \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} |a_i|$$

Comme $|a_i| \to 0$, la même preuve qu'en deuxième partie de question 4.3 indique que

$$\lim_{m \to +\infty} R_m = 0$$

4.7. Comme $R_n \to 0$, la première égalité obtenue à la question précédente montre que $\frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}$ est le terme général d'une série convergente avec

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = S = \sum_{k \geq 0} (-1)^k a_k$$

4.8. Soit g_n la suite de fonctions définie par $g_0 = f$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ g_{n+1} : x \mapsto g_n(x) - g_n(x+1)$$

f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, toutes les fonctions g_n le sont. On montre par récurrence que la proposition

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ (-1)^k g_n^{(k)}(x) \geq 0$$

est vraie pour tout entier n.

- C'est vrai au rang 0 d'après l'hypothèse faite sur f.
- Supposons le résultat vrai à un certain rang n. On a bien sûr

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ g_{n+1}^{(k)}(x) = g_n^{(k)}(x) - g_n^{(k)}(x+1)$$

  Si k est pair alors $g_n^{(k)}$ décroît (sa dérivée est négative par hypothèse de récurrence) et $g_{n+1}^{(k)}(x)$ est donc positive. Si k est impair, on a de même $g_{n+1}^{(k)}(x)$ positive. Ainsi, $g_{(n+1)}(x)$ est du signe de $(-1)^k$ et on a le résultat au rang $n+1$.

Une récurrence immédiate montre que la proposition

$$\forall k \in \mathbb{N},\ (\Delta^n a)_k = g_n(k)$$

est vraie pour tout n. D'après le résultat de la première récurrence (avec $k=0$) ces quantités sont positives.
On montre alors par récurrence que la propriété

$$0 \le (\Delta^m a)_0 \le a_0$$

est vraie pour tout m.
- C'est vrai pour $m=0$ (on a $(\Delta^0 a)_0 = a_0 = f(0) \ge 0$ puisque $f(x) \ge 0$ pour tout $x \ge 0$).
- Supposons le résultat vrai à un rang $m \ge 0$ donné. On a $(\Delta^{m+1}a)_0 = (\Delta^m a)_0 - (\Delta^m a)_1$ et $(\Delta^m a)_1 \ge 0$ donne

$$(\Delta^{m+1}a)_0 \le (\Delta^m a)_0 \le a_0$$

  Enfin, $0 \le (\Delta^{m+1}a)_0$ a été vu en première partie de question.

Il nous reste à diviser par $2^{m+1} > 0$ pour obtenir

$$\forall m \in \mathbb{N},\ 0 \le \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \le \frac{a_0}{2^{m+1}}$$

4.9. Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$; f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)} : x \mapsto (-1)^k \frac{k!}{(x+1)^{k+1}}$$

f vérifie donc les hypothèses de la question précédente. La suite de terme génarl $a_k = f(k)$ est décroissante et de limite nulle. On a vu en question 1.1 que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \ln(2)$$

D'après la question 4.7 (les hypothèses de cette question ont été vérifiées) on a donc

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = \ln(2)$$

On obtient une approximation de $\ln(2)$ en calculant une somme partielle de la série précédente. Si on considère la somme partielle d'ordre n (qui possède $n+1$ termes), l'erreur commise est

$$\left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \right| \le \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{a_0}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Cinquième partie.

5.1. On a

$$b_k - b_{k+1} = \int_0^1 x^k(1-x)w(x)\,dx \geq 0$$

puisque l'intégrale d'une fonction positive est positives (les bornes étant dans le bons sens). Pour étudier la suite (b_k), on peut utiliser le théorème de convergence dominée.

- Pour tout k, $g_k\ :\ x \mapsto x^k w(x)$ est une fonction continue.
- (g_k) converge simplement vers 0 sur $]0,1[$ et cette limite simple est continue.
- Pour tout $x\in]0,1[$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $|g_k(x)| \leq w(x)$. Le majorant est indépendant de k et intégrable sur $]0,1[$ (fonction positive dont l'intégrale existe).

Le théorème s'applique donc et indique que

$$\lim_{k\to+\infty} b_k = 0$$

5.2. On montre par récurrence sur n que P_n est un polynôme de degré n.

- C'est vrai par définition pour P_0 et P_1
- Soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang n. P_{n+1} est alors la somme d'un polynôme de degré $n+1$ et d'un autre de dedré $n-1$; c'est donc un polynôme de degré $n+1$.

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et tout entier $n\geq 1$, on a

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta)$$

En prenant $\theta = \arccos(x)$, on en déduit que

$$\forall n \geq 1,\ \forall x\in[-1,1],\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

x étant fixé dans $[0,1]$ (pour que $1-2x\in[-1,1]$), $(T_n(1-2x))$ et $(P_n(x))$ sont deux suites ayant les mêmes deux premiers termes et vérifiant la même relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Ces deux suites sont donc égales et

$$\forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N},\ P_n(x) = T_n(1-2x)$$

5.3. L'idée la plus immédiate est celle de la récurrence, l'hypothèse étant formulée par l'énoncé. La formule est correcte aux rang 0 et 1 et il suffit qu'on la prouve au rang $n+1$ en la supposant correcte aux rangs n et $n-1$. Avec cette hypothèse, on a une expression de P_n et une de P_{n-1}. On en déduit, après regroupement des termes de même degré que

$$2(1-2x)P_n(x) - P_{n-1}(x) = 1 + \sum_{m=1}^{n+1}(-1)^m\alpha_m x^m$$

où l'on a

$$\alpha_{n+1} = -(-1)^n 2^{2n+2} = (-1)^{n+1}2^{2(n+1)}$$

$$\alpha_n = (-1)^n\left(2^{2n} + \frac{n}{2n-1}\binom{2n-1}{2n-2}2^{2n}\right) = (-1)^n 2^{2n}(1+n) = (-1)^n 2^{2n}\frac{n+1}{2n+1}\binom{2n+1}{2n}$$

et pour $m\in[1..n-1]$,

$$\alpha_m = (-1)^m 2^{2m}\left(\frac{2n}{n+m}\binom{n+m}{2m} + \frac{n}{n+m-1}\binom{n+m-1}{2m-2} - \frac{n-1}{n+m-1}\binom{n+m-1}{2m}\right)$$

En revenant à l'expression de $\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!}$, on obtient

$$\alpha_m = (-1)^m 2^{2m}\frac{n}{n+m}\frac{(n+m)!}{(2m)!(n-m)!}\left(2 + \frac{2m(2m-1)}{(n+m-1)(n-m+1)} - \frac{(n-1)(n-m)}{n(n+m-1)}\right)$$

La parenthèse se simplifie en $\frac{(n+1)(n+m)}{n(n-m+1)}$ et ainsi

$$\alpha_m = \frac{n+1}{n+m+1} \frac{(n+m+1)!}{(2m)!(n-m+1)!} = \frac{n+1}{n+m+1}\binom{n+m+1}{2m}$$

Par la relation de récurrence définissant la suite (P_k) on a donc

$$P_{n+1}(x) = \sum_{m=0}^{n+1} (-1)^m \frac{n+1}{n+1+m}\binom{n+1+m}{2m} 2^{2m} x^m$$

ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.
Remarque : tous les calculs faits au brouillon n'ont pas été reportés mais les étapes principales sont écrites ce qui est nécessaire puisque l'énoncé donnait le résultat.
On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(-1) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m} 2^{2m} > 0$$

puisque la somme est composée de termes tous > 0.

5.4. On remarque tout d'abord que $P_n(-1) - P_n(x)$ est un polynôme (de degré n) dont -1 est racine et donc factorisable par $1+x$. La fonction Q_n définie par l'énoncé se simplifie donc et est bien polynomiale (de degré $n-1$). Plus précisément,

$$P_n(-1) - P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m} 2^{2m}(1-(-x)^m) = (1+x)\sum_{m=0}^{n} \frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m} 2^{2m}(1+(-x)+\dots+(-x$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{P_n(-1)} \sum_{m=0}^{n} \frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m} 2^{2m}(1+(-x)+\dots+(-x)^{m-1})$$

Le coefficient de x^k dans $Q_n(x)$ s'obtient en prenant la somme des coefficients de x^k dans chacun des polynômes de la somme. Ce coefficient est non nuls pour $m \geq k-1$. On a donc

$$Q_n(x) = \frac{1}{P_n(-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \sum_{m=k+1}^{n} \frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m} 2^{2m}(-1)^k$$

On en déduit alors que

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \int_0^1 x^k w(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k b_k$$

Avec l'expression de α_k, on a finalement

$$s(n) = \frac{1}{P_n(-1)} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c_{n,k} b_k \quad \text{avec} \quad c_{n,k} = \sum_{m=k+1}^{n} \frac{n}{n+m}\binom{n+m}{2m} 2^{2m}$$

5.5. La suite de termé général $x_n = P_n(-1)$ vérifie

$$x_0 = 1,\ x_1 = 3 \ \text{ et } \ \forall n \geq 1,\ x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$$

C'est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 6r + 1 = 0$. Les racines de cette équation sont $3 \pm \sqrt{8}$ et il existe donc des constantes a et b telles que pour tout n, $x_n = a(3+\sqrt{8})^n + b(3-\sqrt{8})^n$. Les données initiales permettent d'obtenir $a = 1/2$ et ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(-1) = \frac{1}{2}\left((3+\sqrt{8})^n + (3-\sqrt{8})^n\right)$$

D'après la définition de la suite (b_k), on a

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-x)^k w(x)\, dx$$

Soit $g_k : x \mapsto (-x)^k w(x)$; la suite (g_k) est constituée de fonctions continues et la série associée converge simplement sur $]0,1[$ vers $x \mapsto \frac{w(x)}{1+x}$ qui est continue sur $]0,1[$. Enfin,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=0}^{n} g_k(x)\right| = w(x)\frac{|1-(-x)^{n+1}|}{1+x} \le \frac{2w(x)}{1+x} \le 2w(x)$$

Le majorant est indépendant de n et est intégrable sur $]0,1[$. Le théorème de convergence dominée s'applique et indique que

$$S = \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}\, dx$$

On a donc

$$s(n) - S = \int_0^1 \left(Q_n(x) - \frac{1}{1+x}\right) w(x)\, dx = -\int_0^1 \frac{P_n(x)}{P_n(-1)(1+x)} w(x)\, dx$$

D'après la question 5.2 (et le lien entre P_n et T_n) on a $|P_n(x)| \le 1$ pour tout $x \in [0,1]$. On en déduit que

$$|s(n) - S| \le \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{w(x)}{1+x}\, dx = \frac{S}{P_n(-1)}$$

Enfin, $|P_n(-1)| \ge \frac{1}{2}(3+\sqrt{8})^n$ et on a finalement

$$|s(n) - S| \le \frac{2S}{(3+\sqrt{8})^n}$$

5.6. On commence par regarder le première boucle. On montre par récurrence qu'à l'entrée de la boucle d'indice numéro k, la valeur de d_0 est $P_k(-1)$ et celle de d_1 est $P_{k+1}(-1)$.

- Pour $k = 0$, il s'agit de voir les valeurs initiales de d_0 et d_1 qui sont bien $1 = P_0(-1)$ et $3 = P_1(-1)$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'au rang k. On effectue alors la boucle de numéro k. La nouvelle valeur de d_1 est $6P_{k+1}(-1) - P_k(-1) = P_{k+2}(-1)$ et celle de d_0 est $P_{k+1}(-1)$. On a donc le résultat au rang $k+1$.

On sort de la boucle avant d'entamer la boucle numéro $n-1$ et d_1 vaut alors $P_n(-1)$.
On passe à l'analyse de la seconde boucle. On peut montrer par récurrence qu'à la fin de la boucle numérotée k, les valeurs des variables sont

$$c = (-1)^k c_{n,k},\ s = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i c_{n,i} b_i,\ b = (-1)^k \frac{n}{n+k+1} \binom{n+k+1}{2(k+1)} 2^{2k+1}$$

La preuve est un peu fastidieuse. Elle a été menée au brouillon mais n'est pas reprise ici : je considère comme suffisant d'expliciter l'invariant de boucle précédent. On sort de la boucle à la fin de l'étape $n-1$ et la valeur de sn est alors celle de $s(n)$.

5.7. Si on choisit $w = 1$, on obtient $b_k = \frac{1}{k+1}$ et

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(2)$$

Le calcul de $s(n)$ avec l'algorithme précédent (les b_k sont connus) donne une valeur approchée de $\ln(2)$. Il suffit, pour obtenir une approximation à ε près de choisir n tel que $\frac{2\ln(2)}{(3+\sqrt{8})^n} \le \varepsilon$.