1 Exponentielles de matrices.

1. Si on considère une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$, on en déduit une norme sur $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, la norme subordonnée, qui vérifie $\|u \circ v\| \leq \|u\|.\|v\|$ d'après le cours. En notant $|||M|||$ la quantité $\|u\|$ où u est l'endomorphisme canoniquement associé à M, on obtient alors une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est une norme matricielle.
On peut aussi exhiber une telle norme. L'application $(M, N) \mapsto Tr({}^t\overline{M}N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\|.\|$ la norme associée. On a
$$\|AB\|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right|^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|.|b_{k,j}|\right)^2$$
L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique donne alors
$$\|AB\|^2 \leq \sum_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}|^2 \sum_{k=1}^n |b_{k,j}|^2\right)$$
En réordonnant les sommes, on voit que le majorant vaut exactement $\|A\|^2\|B\|^2$ et on en déduit que $\|.\|$ est une norme matricielle.

2.a. Par inégalité triangulaire, on a
$$|||S_p - S_m||| \leq \sum_{k=m+1}^p \frac{|||A^k|||}{k!}$$
Par ailleurs, une récurrence immédiate (à partir de la propriété de norme matricielle) montre que
$$\forall k \geq 1,\ \left|\left|\left|A^k\right|\right|\right| \leq |||A|||^k$$
Remarque : c'est a priori faux pour $k = 0$ ce qui n'est pas gênant dans cette question puisque la somme débute à $m + 1 \geq 1$.
On en déduit donc que
$$|||S_p - S_m||| \leq \sum_{k=m+1}^p \frac{|||A|||^k}{k!}$$

2.b. Comme $\sum x^k/k!$ converge pour tout réel x (de somme e^x), la suite des sommes partielles de $\sum \frac{|||A|||^k}{k!}$ est de Cauchy. D'après l'inégalité précédente, il en est de même de la suite (S_n). Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est complet, on en déduit que cette suite converge.
Remarque : plus simplement, $\sum A^k/k!$ est absolument convergente puisque $\left|\left|\left|\frac{A^k}{k!}\right|\right|\right| \leq \frac{|||A|||^k}{k!}$ et on conclut encore par complétude.

2.c. A commute avec tout polynôme en A et donc
$$\forall N,\ AS_N = S_N A$$
Les application $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ sont linéaires en dimension et donc continues. Comme $S_N \to e^A$, un passage à la limite ($N \to +\infty$) donne
$$Ae^A = e^A A$$
De même, les sommes étant finies et la transposition linéaire et vérifiant ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$ (récurrence sur k), on a
$$\forall N,\ {}^tS_N = \sum_{k=0}^N \frac{({}^tA)^k}{k!}$$

Quand $N \to +\infty$, le membre de droite tend vers $e^{{}^tA}$ et, par continuité de la transposition, celui de gauche tend vers ${}^te^A$. On a donc

$$ {}^te^A = e^{{}^tA} $$

3. On suppose qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale $D = diag(d_1, \dots, d_n)$ telles que $P^{-1}AP = D$. On a alors

$$ \forall k,\ A^k = (PAP^{-1})^k = PD^kP^{-1} = Pdiag(d_1^k, \dots, d_n^k)P^{-1} $$

On en déduit (les sommes sont finies) que

$$ S_N = P\sum_{k=0}^{N} D^kP^{-1} = Pdiag\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{d_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{N}\frac{d_n^k}{k!}\right)P^{-1} $$

$M \mapsto PMP^{-1}$ étant continue (linéaire en dimension finie par exemple, mais on peut aussi par théorèmes généraux), un passage à la limite ($N \to +\infty$) donne

$$ e^A = Pe^DP^{-1} = Pdiag(e^{d_1}, \dots, e_{d_n})P^{-1} $$

Ainsi, e^A est diagonalisable da,s la même base que A et ses valeurs propres sont les exponentielles de celles de A.

4.a. Comme ci-dessus, on a $e^{0_n} = diag(e^0, \dots, e^0) = I_n$. Ainsi,

$$ \Phi(0) = I_nx = x $$

Par ailleurs, on a

$$ e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^k = \lim_{N\to+\infty} S_N(tA) $$

On voudrait dériver cette relation par rapport à t. On pourra intervertir la dérivation et la limite si on montre que la suite $(S_n(tA))$ converge uniformément sur tout compact ou encore que la série $\sum (tA)^k/k!$ converge normalement sur tout compact (le terme général de la série est de classe $\mathcal{C}^1$). C'est le cas car

$$ \forall t \in [-c, c],\ \left|\left|\left|\frac{t^k}{k!}A^k\right|\right|\right| \le \frac{(c\,|||A|||)^k}{k!} $$

et le majorant est le terme général d'une série indépendante de t et convergente. On a donc

$$ \Phi'(t) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!}A^{k+1}\right)x = Ae^{tA}x = A\Phi(t) $$

On a ainsi montré que Φ est solution de (1).

4.b. Comme on est dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz cas linéaire, on sait qu'une solution de $X' = AX + f(t)$ vérifiant $X(0) = x$ est unique. Il suffit que l'on montre que Ψ convient. Elle vérifie déjà $\Psi(0) = x$. Par ailleurs, $\tau \mapsto e^{-\tau A}f(\tau)$ étant une application continue ($\tau \mapsto e^{-\tau A}$ est même de classe $\mathcal{C}^1$, on vient de le voir), l'application

$$ G : t \mapsto \int_0^t e^{-\tau A}f(\tau)\, d\tau $$

est de classe $\mathcal{C}^1$ (primitive de la première fonction). Ainsi, Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$ \Psi'(t) = A\Psi(t) + e^{tA}G'(t) = A\Psi(t) + e^{tA}e^{-tA}f(t) $$

On pourra conclure que Ψ est solution de $X' = AX + f(t)$ si on montre que e^M est inversible d'inverse e^{-M}. De manière plus générale, on a

$$\forall N, M, \quad \text{si} \quad MN = NM, \; e^M e^N = e^{M+N}$$

ce qui donne le résultat voulu en prenant $N = -M$.
Preuve de ce résultat : les séries $\sum M^k/k!$ et $\sum N^k/k!$ étant absolument convergente, on peut utiliser le résultat sur le produit de Cauchy :

$$e^M e^N = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{M^j}{j!} \frac{N^{k-j}}{(k-j)!} \right)$$

avec $MN = NM$, on peut utiliser la formule du binôme :

$$e^M e^N = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{(M+N)^k}{k!} = e^{M+N}$$

5. Supposons toutes les solutions asymptotiquement stables. Soit λ une valeur propre de A et x un vecteur propre associé. On a alors $A^k = \lambda^k x$ et donc $\Phi(t) = e^{tA}x = e^{\lambda t}x$. Comme x n'est pas nul, la condition "asymptotiquement stable" indique que $e^{\lambda t} \to 0$ quand $t \to +\infty$. Ainsi ($e^{a+ib} = e^a e^{ib}$ est de module e^a), la partie réelle de λ est < 0.
   Supposons, réciproquement, que toutes les valeurs propres de A aient cette propriété. Notons $e_1, \dots, e_n$ une base de vecteurs propres et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Soit x un vecteur et $x_1, \dots, x_n$ ses coordonnées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. On a alors

$$\Phi(t) = e^{tA}x = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{tA} e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e^{t\lambda_i} e_i$$

   C'est une somme finie de terme de limite nulle en $+\infty$ et Φ est donc de limite nulle en ∞. Ainsi, toutes les solutions sont asymptotiquement stables.

2 Commandabilité.

6. $\mathcal{A}_T$ est inclus dans $\mathbb{R}^n$ et est non vide (il contient 0 pour lequel le contrôle $u = 0$ convient puisque la solution nulle vérifie $X' = AX$ et $X(0) = 0$). Soient x et y des éléments de $\mathcal{A}_T$ (correspondant à des contrôles u et v et des solution Φ et Ψ) et $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\Theta = \Phi + \lambda\Psi$ vérifie alors l'équation

$$X' = AX + B(u(t) + \lambda v(t))$$

   et $\Theta(0) = 0$, $\Theta(T) = \Phi(T) + \lambda\Psi(T) = x + \lambda y$. On a don montré que $x + \lambda y \in \mathcal{A}_T$ (et exhibé un contrôle correspondant).

7. Soit Φ l'unique solution de $X' = AX + Bu(t)$ telle que $X(0) = 0$. La partie I montre que

$$\Phi(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} Bu(\tau)\, d\tau$$

   Rappel : si F est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et g une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}^n$ alors

$$F\left(\int_0^t g(\tau)\, d\tau \right) = \int_0^t F(g(\tau))\, d\tau$$

ce qui découle de la linéarité de l'intégrale.
Ici, avec un formalise matriciel,

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{tA}e^{-\tau A}Bu(\tau)\ d\tau$$

Comme tA et $-\tau A$ commutent, on peut utiliser le résultat prouvé en question 4.b pour écrire

$$\Phi(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)\ d\tau$$

En particulier, on a donc

$$x_T = \Phi(T) = \int_0^T e^{(T-\tau)A}Bu(\tau)\ d\tau$$

8.a. Il est évident que

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\},\ A^k \in Vect(I_n, A, \dots, A^{n-1})$$

Le théorème de Cayley-Hamilton indique que $P = det(A - XI_n)$ annule A. Soit $k \geq n$ et $X^k = QP + R$ la division euclidienne de X^k par P. On a $A^k = R(A)$ ($Z \mapsto Z(A)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). et comme $deg(R) \leq n-1$ (P est de degré n), on a

$$A^k \in Vect(I_n, A, \dots, A^{n-1})$$

8.b. Soit $Z \in \mathbb{R}^{mn}$; Z peut s'écrire, par blocs, $Z = \begin{pmatrix} Z_0 \\ \vdots \\ Z_{n-1} \end{pmatrix}$ avec Z_k bloc de taille m. On a alors

$$CZ = \sum_{i=0}^{n-1}(A^iB)Z_i$$

On a donc, les Z_i pouvant être pris quelconques,

$$Im(C) = \sum_{i=0}^{n-1} Im(A^iB)$$

Soit $x \in \mathcal{A}_T$ et u un contrôle correspondant. La question 7 donne

$$x = \int_0^T e^{(T-\tau)A}Bu(\tau)\ d\tau$$

Par ailleurs, e^{sA} est, pour tout réel s, la limite d'une suite d'éléments de $Vect(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ (question précédente et définition de e^{sA}). Cet espace étant fermé (il est de dimension finie), e^{sA} en fait encore partie. Il existe donc des fonctions $a_1, \dots, a_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall s,\ e^{sA} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(s)A^i$$

On a alors

$$x = \int_0^T \sum_{i=0}^{n-1} a_i(T-\tau)A^iBu(\tau)\ d\tau = \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^T a_i(T-\tau)(A^iB)u(\tau)\ d\tau = \sum_{i=0}^{n-1} A^iB\int_0^T a_i(T-\tau)u(\tau)\ d\tau$$

ce qui montre que $x \in Im(C)$.

9.a. Soit $y \in \mathcal{A}_T^\perp$. Posons
$$u(s) = {}^tBe^{(T-s)^tA}y$$
On définit alors une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^m$. Soit Φ l'unique solution nulle en 0 de $X' = AX + Bu(t)$. On a alors $x = \Phi(T)$ qui est, par définition, dans $\mathcal{A}_T$ et est donc orthogonal à y, ce qui s'écrit matriciellement ${}^txy = 0$. La question 7 donne
$$x = \int_0^T e^{(T-s)A}B^tBe^{(T-s)^tA}y\ ds$$
On en déduit que (la transposée de l'intégrale est l'intégrale de la transposée)
$$0 =< x|y >= {}^txy = \int_0^T {}^tye^{(T-s)A}B^tBe^{(T-s)^tA}y\ ds$$

9.b. Si on pose $M(s) = {}^tBe^{(T-s)^tA}y$ (élément de $\mathbb{R}^m$), on a donc
$$\int_0^T {}^tM(s)M(s)\ ds = 0$$
Comme $s \mapsto {}^tM(s)M(s) = \|M(s)\|^2$ est positive et continue (et comme $T > 0$), on a donc
$$\forall s \in [0, T],\ M(s) = 0$$
ce que l'on peut encore écrire
$$\forall s \in [0, T],\ y \in Ker({}^t(e^{(T-s)A}B)) = Im\left(e^{(T-s)A}B\right)^\perp$$
On a ici utilisé la formule de cours $Ker({}^tN) = Im(N)^\perp$ qui correspond à $Ker(v^*) = Im(v)^\perp$ pour les endomorphismes. En particulier, pour $s = T$, on obtient que y est orthogal à tout élément de $Im(B)$.
Plus généralement, en dérivant k fois l'égalité $M(s) = 0$ ($s \mapsto e^{(T-s)^tA}$ est infiniment dérivable comme le montre une récurrence aisée) on obtient
$$\forall s \in [0, T],\ {}^tB(-{}^tA)^ke^{(T-s)^tA}y = 0$$
et on obtient alors (même raisonnement que y est orthogonal à tout élément de $Im((-1)^kA^kB) = Im(A^kB)$. y est alors orthogonal à toute combinaison de tels éléments c'est à dire à tout élément de $Im(C)$. On a ainsi montré que
$$\mathcal{A}_T^\perp \subset Im(C)^\perp$$
ce qui donne, par passage à l'orthogonal,
$$Im(C) \subset \mathcal{A}_T$$
Avec la question $8.b$ on a donc
$$Im(C) = \mathcal{A}_T$$

9.c. C ne dépendant pas de T, $\mathcal{A}_T$ est donc indépendant de T.

10.a. Avec la question précédente, la paire (A, B) est commandable si $Im(C) = \mathbb{R}^n$. Comme $Im(C) \subset \mathbb{R}^n$, ceci équivaut à $rang(C) = n$ (le seul sous-espace de dimension n de $\mathbb{R}^n$ étant $\mathbb{R}^n$ lui même).

10.b. Dans ce cas, on a toujours $\mathcal{A}_{T'} = Im(C) = \mathbb{R}^n$ (question $9.c$). La commandabilité en temps T entraîne celle en tout temps $T' > 0$.

10.c. Pour tout choix de A, la paire $(A, 0)$ est non commandable puisque $Im(C) = \{0\}$ (on est dans le cas d'un système homogène et la seule solution nulle en 0 est la fonction nulle ; on peut donc seulement atteindre 0).

11.a. Pour tout s, $N(s) = e^{(T-s)A}B^tBe^{(T-s)^tA}$ est symétrique de taille n. Il en est donc de même pour D (la transposée de l'intégrale est l'intégrale de la transposée). Les éléments de $Im(D)$ sont de la forme

$$z = \int_0^T e^{(T-s)A}B^tBe^{(T-s)^tA}y\, ds$$

Ceci correspond à l'élément de $\mathcal{A}_T$ associé au contrôle $u(s) = {}^tBe^{(T-s)^tA}y$ (ce qui définit une application continue). On a donc bien

$$Im(D) \subset \mathcal{A}_T$$

11.b. Soit $y \in Ker(D)$. On a alors

$$\int_0^T e^{(T-s)A}B^tBe^{(T-s)^tA}y\, ds$$

et on en déduit que

$$\int_0^T {}^tye^{(T-s)A}B^tBe^{(T-s)^tA}y\, ds$$

On est revu à l'égalité de 9.a à partir de laquelle on a vu que $y \in Im(C)^\perp$. Comme $Im(C) = \mathcal{A}_T$, on a donc $y \in \mathcal{A}_T^\perp$ et l'inclusion

$$Ker(D) \subset \mathcal{A}_T^\perp$$

11.c. Ceci découle d'une propriété de cours rappelée en 9.c. Reprouvons là dans le cas particulier demandé. Soit $x \in Im(M)^\perp$. On a

$$\|Mx\|^2 = {}^t(Mx)(Mx) = {}^txM^2x = (x|M^2x) = 0$$

car $M^2x \in Im(M)$. Ainsi $Mx = 0$ et $x \in Ker(M)$. On a donc

$$Im(M)^\perp \subset Ker(M)$$

11.d. En passant à l'orthogonal dans la relation de 11.b on a

$$\mathcal{A}_T \subset Ker(D)^\perp$$

et en passant à l'orthogonal dans la relation de 11.c on a donc

$$\mathcal{A}_T \subset Im(D)$$

Avec la question 11.a on conclut que

$$\mathcal{A}_T = Im(D)$$

12.a. (A, B) étant commandable, $Im(D) = \mathcal{A}_T = \mathbb{R}^n$ et D est de rang n. Comme la matrice est carrée d'ordre n, elle est inversible.

12.b. Soit v le contrôle proposé. Il envoie l'état nul à $t = 0$ sur l'état y_T au temps T avec

$$y_T = \int_0^T e^{(T-s)A}Bv(s)\, ds$$

Avec la définition de v, on a

$$e^{(T-s)A}Bv(s) = e^{(T-s)A}B^tBe^{(T-s)^tA}D^{-1}x_T$$

D et x_T ne dépendant pas de s, on a donc

$$y_T = \left(\int_0^T e^{(T-s)A}B^tBe^{(T-s)^tA}\ ds\right) D^{-1}x_T = DD^{-1}x_T = x_T$$

12.c. Soit u un contrôle envoyant l'état nul à $t=0$ en x_T au temps T. On a donc (question 7)

$$\int_0^T e^{(T-s)A}B(u(s)-v(s))\ ds = 0$$

En utilisant l'expression de v, on a alors (toujours en utilisant le fait que x_T et D sont des constantes)

$$\int_0^T (v(s)|u(s)-v(s))\ ds = \int_0^T {}^tv(s)(u(s)-v(s))\ ds = {}^tx_TD^{-1}\int_0^T e^{(T-s)A}B(u(s)-v(s))\ ds = 0$$

12.d. Si u et v sont deux contrôles convenables, on a donc

$$\int_0^T \|v(s)\|^2\ ds = \int_0^T (v(s)|u(s))\ ds$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$, on a donc

$$\int_0^T \|v(s)\|^2\ ds = \int_0^T \|v(s)\|.\|u(s)\|\ ds$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0,T]$ muni de $(f,g)\mapsto\int_0^T fg$, on a alors

$$\int_0^T \|v(s)\|^2\ ds \leq \sqrt{\int_0^T \|v(s)\|^2\ ds}\sqrt{\int_0^T \|u(s)\|^2\ ds}$$

Si $\sqrt{\int_0^T \|v(s)\|^2\ ds} \neq 0$ on obtient l'inégalité voulue en divisant par ce terme. Sinon, l'inégalité voulue est évidente. On a ainsi

$$\int_0^T \|v(s)\|^2\ ds \leq \int_0^T \|u(s)\|^2\ ds$$

Si il y a égalité, on a $\forall s,\ (u(s)|v(s)) = \|v(s)\|.\|u(s)\|$ (sinon, par continuité, l'intégrale de la différence est >0) ce qui montre l'existence de $\lambda(s)\geq 0$ tel que $v(s)=\lambda(s)u(s)$. Par ailleurs, on a aussi égalité dans la seconde inégalité de Schwarz et les fonctions $s\mapsto\|u(s)\|$ et $s\mapsto\|v(s)\|$ doivent être liées ce qui donne $\lambda(s)$ constant. On a alors, en réinjectant dans la relation de 12.c,

$$(\lambda-1)\int_0^T \|v(s)\|^2\ ds = 0$$

On a alors soit v qui est nulle et alors $u=\lambda v$ l'est aussi, soit $\lambda=1$ et $u=v$.
Réciproquement, il y a bien égalité pour $u=v$ (c'est le seul cas d'égalité).

13.a. Si $u = 0$, l'équation est homogène. C'est une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

Les solutions de cette équation sont $\lambda \pm i\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}$. La solution générale de (H) est alors

$$t \mapsto e^{\lambda t}\left(c_1 \cos(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}t) + c_2 \sin(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2})\right)$$

13.b. x est solution de (H) si et seulement si

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\lambda \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix} u(t) \ \text{ avec } \ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

13.c. La matrice C la question 8 est ici

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\lambda\omega_0^2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 2 (déterminant égal à $-\omega_0^4 \neq 0$) et la paire (A, B) est donc commandable d'après la question 10.

3 Stabilisation par retour d'état.

14. On a ici $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_0^2 \end{pmatrix}$ et on cherche (c'est suffisant d'après la question 5) une matrice K telle que $A + BK$ soit diagonalisable à valeurs propres de partie réelle < 0. Posons $K = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$. On a alors

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2(a-1) & \omega_0^2 b - 2\lambda \end{pmatrix}$$

Si on choisit $b = \frac{2\lambda - 1}{\omega_0^2}$ et $a = 1 - \frac{1}{\omega_0^2}$ on a alors

$$A + BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

matrice dont le polynôme caractéristique est $X^2 + X + 1$. Il y a donc deux racines (j et j^2) à partie réelle < 0. Le couple (A, B) est ainsi stabilisable.

15. On s'intéresse ici à l'équation

$$x''(t) + \omega_0^2(1-k)x(t) = 0$$

et on cherche si on peut choisir k de façon à ce que toutes les solutions soient de limite nulle en $+\infty$.

- Si $k = 1$ alors la solution constante égale à 1 donne un contre-exemple.
- Si $k > 1$, $t \mapsto e^{|\omega_0|\sqrt{k-1}t}$ fournit un contre-exemple.
- Si $k < 1$, $t \mapsto \cos(\omega_0\sqrt{1-k}t)$ fournit un contre-exemple.

On ne peut trouver un tel scalaire k.

16. Supposons (A,B) commandable. La matrice

$$C = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

est alors de rang n. Soit $(\tilde{A},\tilde{B})$ conjuguée de (A,B) avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$. On a

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{A}^2\tilde{B} & \dots & \tilde{A}^{n-1}\tilde{B} \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} P^{-1}B & P^{-1}AB & P^{-1}A^2B & \dots & P^{-1}A^{n-1}B \end{pmatrix} = P^{-1}C$$

Multiplier par une matrice inversible ne changeant pas le rang, $\tilde{C}$ est de rang n et $(\tilde{A},\tilde{B})$ est commandable.
La réciproque s'obtient en changeant P en P^{-1}.

17.a. La matrice $C = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ est carrée d'ordre n et de rang n. Elle est donc inversible et ses colonnes, qui ont $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$, forment une base de $\mathbb{R}^n$. Le vecteur A^nb pouvant s'exprimer dans cette base, il existe des scalaire $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que

$$A^nb = a_0b + \dots + a_{n-1}A^{n-1}b$$

17.b. On montre par récurrence que

$$f_{n-k} = A^kb - \sum_{i=n-k}^{n-1} a_iA^{i-n+k}b$$

- C'est vrai pour $n = 0$ ($f_n = b$) et $n = 1$ ($f_{n-1} = Ab - a_{n-1}b$).
- Supposons le résultat vrai au rang $k \in [0..n-2]$. On a alors

$$f_{n-k-1} = Af_{n-k} - a_{n-k-1}f_n = A^{k+1}b - \sum_{i=n-k}^{n-1} a_iA^{i-n+k+1}b - a_{n-k-1}b$$

$$= A^{k+1}b - \sum_{i=n-k-1}^{n-1} a_iA^{i-n+k+1}b$$

  ce qui pouve le résultat au rang $k+1$.

En particulier, la matrice de la famille $(f_n, \dots, f_1)$ dans la base $(b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Cette matrice est donc inversible et la famille $(f_n, \dots, f_1)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

17.c. Comme $Af_i = f_{i-1} + a_{i-1}f_n$ pour $i \geq 2$ et

$$Af_1 = A\left(A^{n-1}b - \sum_{i=1}^{n-1} a_iA^{i-1}b\right) = A^nb - \sum_{i=1}^{n-1} a_iA^ib = a_0b = a_0f_n$$

dans la base $(f_1, \dots, f_n)$, l'endomorphisme canoniquement associé à A est représenté par $\tilde{A}$. Par définition, les coordonnées de b dans cette base sont $(0, \dots, 0, 1)$. Ainsi, en notant P la matrice dont les colonnes sont $(f_1, \dots, f_n)$, on a

$$P^{-1}AP = \tilde{A} \text{ et } P^{-1}B = \tilde{B}$$

ce qui montre que (A,B) et $(\tilde{A},\tilde{B})$ sont conjugués.

17.d. L'indépendance linéaire de $(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b)$ indique qu'aucun polynôme non nul de degré $\leq n-1$ n'annule A. Par ailleurs,

$$P = X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

annule A ($P(A)$ est nul sur la base $(b, Ab, \ldots, A^{n-1}b)$). Ce polynôme P est donc générateur de l'idéal des annulateurs de A (polynôme minimal). Comme le polynôme caractéristique est un multiple de ce polynôme (Cayley-Hamilton) et est de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$, il vaut $(-1)^n P$. Le polynôme caractéristique de $\tilde{A}$ est le même (invariant de similitude).
Remarque : on peut retrouver aisément cela en faisant un développement par rapport à la dernière ligne.
Si $\tilde{K} = \begin{pmatrix} k_0 & \ldots & k_{n-1} \end{pmatrix}$ alors

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ a_0 + k_0 & a_1 + k_1 & \ldots & a_{n-2} + k_{n-2} & a_{n-1} + k_{n-1} \end{pmatrix}$$

Le calcul du polynôme caractéristique se déduit de celui de $\tilde{A}$. Il vaut

$$(-1)^n \left(X^n - \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + k_i) X^i \right)$$

On voit que lorsque les k_i varient, on peut atteindre tout polynôme F de degré n et de coefficient dominant $(-1)^n$.

17.e. Si on pose $K = \tilde{K}^P - 1$ on a alors

$$\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{K} = P^{-1}(A + BK)P$$

et F est son polynôme caractéristique (toujours invariance par similitude).

18. Si (A, B) est commandable on peut ainsi trouver K tel que $A + BK$ soit diagonalisable à valeurs propres toutes négatives (il suffit de prendre $F = (-1)^n(X+1)\ldots(X+n)$ on a alors n valeurs propres distinctes et la matrice est diagonalisable et ses valeurs propres sont $-1, \ldots, -n$). avec la partie I, (A, B) est alors stabilisable.