XENS Cachan
PSI

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Soit E l'ensemble des fonctions réelles g définies sur $\mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :

i/ g est paire,

ii/ g est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux, bornée sur $\mathbb{R}$ et le nombre de points de discontinuité de g est fini. On note $g^+(x) = \lim\limits_{y\to x, y>x} g(y)$ et $g^-(x) = \lim\limits_{y\to x, y<x} g(y)$,

iii/ en tout point x de $\mathbb{R}$, on a $g(x) = \dfrac{g^+(x)+g^-(x)}{2}$,

iv/ g est intégrable sur $[0,+\infty[$.

À toute fonction g de E, on associe la fonction réelle $\mathcal{F}_g$ définie par l'intégrale :

$$\mathcal{F}_g(t) = \int_0^\infty g(x)\cos(tx)dx. \tag{1}$$

Dans ce problème, nous étudions une méthode permettant de montrer, dans certains cas, que l'équation $\mathcal{F}_g(t) = 0$ possède une infinité de racines réelles.

Tournez la page S.V.P.

Partie I

I.1/ Soit g appartenant à E. Montrer que $\mathcal{F}_g$ définie par (1) est une fonction paire continue.

I.2/ Soit g définie par $g(x) = \exp(-|x|)$.

I.2.a/ Calculer $\mathcal{F}_g(t)$.

I.2.b/ La fonction $\mathcal{F}_g$ possède-t-elle des zéros réels ?

I.2.c/ La fonction $\mathcal{F}_g$ est-elle dans E ?

I.3/ On désigne par $h_{a,A}$ (a réel non nul et A réel strictement positif) la fonction de E définie par

$$\begin{cases} h_{a,A}(x) = a, & |x| < A \\ h_{a,A}(x) = \dfrac{a}{2}, & |x| = A \\ h_{a,A}(x) = 0, & |x| > A. \end{cases}$$

I.3.a/ Calculer $S_{a,A}(t) = \displaystyle\int_0^\infty h_{a,A}(x)\cos(tx)dx$.

I.3.b/ Tracer le graphe de $S_{a,A}$.

I.3.c/ La fonction $S_{a,A}$ possède-t-elle des zéros réels ?

I.3.d/ La fonction $S_{a,A}$ est-elle dans E ?

Partie II

Dans toute cette partie g désigne une fonction quelconque de E.

II.1/ Soient a, b deux réels. Montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_a^b g(x)\sin(nx)dx$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

II.2/ Soit $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(nx)}{x}dx$.

II.2.a/ Montrer que cette intégrale est bien définie pour tout n entier.

II.2.b/ Montrer que

$$\alpha_n = \frac{1-\cos(n)}{n} + \int_0^n \frac{1-\cos(x)}{x^2}dx.$$

II.2.c/ En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ possède une limite l strictement positive quand n tend vers l'infini.

II.3/

II.3.a/ Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g(x)\frac{\sin(nx)}{x}dx$

(*Indication : on introduira la fonction* $x \mapsto \phi(x) = \dfrac{g(x) - g^+(0)}{x}$).

II.3.b/ Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \int_a^b g(x)\frac{\sin(nx)}{x}dx$ en fonction de l, $g^+(0)$ et $g^-(0)$.

II.3.c/ Calculer $\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{\sin(nx)}{x}dx$.

II.4/ Montrer que, pour tout réel x,

$$\int_{-n}^{n} dt \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x+y)\cos(ty)dy\right) = 4\int_0^n \mathcal{F}_g(t)\cos(xt)dt.$$

II.5/ En déduire que g peut s'écrire $g(x) = \dfrac{1}{l}\lim_{n\to\infty}\int_0^n \mathcal{F}_g(t)\cos(xt)dt$.

II.6/ La fonction $t \mapsto F(t) = \mathcal{F}_g(t)\cos(yt)$ est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout g de E et pour tout y réel ?

Partie III

III.1/ Soit g appartenant à E. On suppose que $\mathcal{F}_g$ possède un nombre fini de zéros réels.

III.1.a/ Montrer qu'il existe a réel non nul et A réel strictement positif tels que $\mathcal{F}_g + h_{a,A}$ soit strictement positive ou strictement négative sur $\mathbf{R}$, où $h_{a,A}$ est la fonction définie à la question I.3.

III.1.b/ Montrer qu'il existe une fonction K de classe $\mathcal{C}^0$ par morceaux, intégrable sur $[0, +\infty[$, de signe constant et ne s'annulant pas sur $\mathbf{R}$ telle que

$$\int_0^\infty K(t)\cos(xt)dt = lg(x) + S_{a,A}(x).$$

III.2/ En déduire que si g appartient à E et a au moins un point de discontinuité, alors $\mathcal{F}_g$ possède une infinité de zéros réels.

III.3/ Soit g la fonction de E définie par $g(x) = e^{-x^4}$. Montrer que $\mathcal{F}_g$ possède une infinité de zéros réels.

(*Indication : on développera g en série entière*).