Partie I : préliminaires

$I.1)$ On a $u'' = Vu - f$ donc u'' est continue. Par conséquent u est de classe $\mathcal{C}^2$. On prouve par récurrence, à l'aide du même argument, que u est de classe $\mathcal{C}^{2k}$ pour tout k, donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.

$I.2)$ V et f sont continues sur $[0,1]$, donc le problème de Cauchy, associé à une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2.

$$\begin{cases} u'' - Vu &= -f \\ u(0) &= a \\ u'(0) &= b \end{cases}$$

possède une unique solution sur $[0,1]$, pour tout couple (a,b) de réels. Si $c - V(0)a = -f(0)$ le problème posé possède une solution unique, sinon il n'en possède pas.

$I.3)$ Non ! Les conditions aux limites ne portent pas sur les valeurs de u et de u' en un point x_0 de $[0,1]$.

$I.4)$ Si $x < x_0$ (et de tels x existent car $x_1 < x_0$) $v(x) \geq v(x_0)$ donc $\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. Par passage à la limite $v'(x_0) \leq 0$. En considérant le cas $x > x_0$, $v'(x_0) \geq 0$. Finalement $v'(x_0) = 0$.

On applique maintenant la formule de Taylor-Young :

$$v(x) = v(x_0) + 0\,(x - x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} v''(x_0) + o((x-x_0)^2)$$

Pour $x \neq x_0$, puisque $v(x) \geq v(x_0)$, en divisant par $(x-x_0)^2$ et en faisant tendre x vers x_0 on obtient $v''(x_0) \geq 0$.

Partie II

$II.1)$
- $u''(x_0) + f(x_0) = V(x_0)u(x_0)$. Or $u''(x_0) \geq 0$, $f(x_0) \geq 0$ et $V(x_0) > 0$ donc $u(x_0) \geq 0$.
- u est continue sur $[0,1]$, elle atteint un minimum global en x_0 . Si $x_0 = 0$ ou $x_0 = 1$ alors pour tout x $u(x) \geq 0 = u(0) = u(1)$. Si $x_0 \in]0,1[$ alors $u(x_0) \geq 0$ d'après le début de la question. On a toujours pour tout x $u(x) \geq u(x_0) \geq 0$.

$II.2)$ Il suffit de remarquer que u_0 est solution de $-u'' + Vu = f$ si et seulement si $-u_0$ est solution de $-u'' + Vu = -f$ et que u_0 vérifie (4) si et seulement si $(-u_0)$ vérifie (4).

$II.3)$ Soit b_1 et b_2 deux réels et t dans $\mathbb{R}$ et $b = (1-t)b_1 + tb_2$. Soit $v = (1-t)u_{b_1} + tu_{b_2}$. On a $v(0) = 0$, $v'(0) = b$ et $-v'' + Vv = (1-t)f + tf = f$. Par unicité du problème de Cauchy $v = u_b$. En particulier

$$\phi(b) = v(1) = (1-t)u_{b_1}(1) + tu_{b_2}(1) = (1-t)\phi(b_1) + t\phi(b_2)$$

et ϕ est bien affine.

$II.4)$ Soit b et b' tels que $\phi(b) = \phi(b')$., alors $u_b - u_{b'}$ est solution de (1) avec les conditions (4) et $f = 0$. Donc puisque $f \geq 0$ on a $u_b - u_{b'} \geq 0$ (question 2.1 et puisque $-f \geq 0$ on a aussi $-(u_b - u_{b'}) \geq 0$. Finalement $u_b - u_{b'} = 0$ et $u_b = u_{b'}$ donc $b = b'$ (dériver en 0.)

$II.5)$ Puisque ϕ est injective et affine de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ϕ est bijective, il existe un unique b_0 tel que $\phi(b_0) = 0$, c'est-à-dire tel que u_{b_0} soit solution de (1) avec les conditions (4).

Partie III

$III.1)$ Soit $i_0 \in [1, n-1]$ tel que $u_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq n-1} u_i$. Si $u_{i_0} \leq 0$ on a aussi $u_{i_0} = \min_{0 \leq i \leq n} u_i$ car $u_0 = u_n = 0$. Donc $u_{i_0-1} + u_{i_0+1} - 2u_{i_0} \geq 0$, or $f_i \geq 0$ donc

$$V_{i_0} u_{i_0} = f_{i_0} + \frac{u_{i_0-1} + u_{i_0+1} - 2u_{i_0}}{(\Delta x)^2} \geq 0$$

or $V_{i_0} > 0$ donc $u_{i_0} \geq 0$. Finalement $u_{i_0} \leq 0 \Rightarrow u_{i_0} \geq 0$, donc $u_{i_0} \geq 0$.

$III.2)$ On calque la démonstration de la partie II. On considère la fonction

$$\begin{array}{cccc} \phi & : & \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} & \to & \mathbb{R}^{n-1} \\ & & \overline{u} & \mapsto & (V_i u_i - \frac{u_{i-1}+u_{i+1}-2u_i}{(\Delta x)^2}) \end{array}$$

Elle est linéaire et la question précédente montre que son noyau est réduit à $\{0\}$ (raisonner comme en 2.4), c'est un isomorphisme car l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont même dimension. En particulier elle est bijective et le système (6) possède une unique solution.

$III.3)$ On a

$$\epsilon_i = \frac{-v_{i-1}+2v_i-v_{i+1}}{(\Delta x)^2} + V_i v_i = \frac{-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}}{(\Delta x)^2} + V_i u_i - \frac{-u((i-1)\Delta x)+2u(i\Delta x)-u((i+1)\Delta x)}{(\Delta x)^2} - V_i u(i\Delta x)$$

donc

$$\epsilon_i = f_i - V_i u(i\Delta x) - \frac{-u((i-1)\Delta x)+2u(i\Delta x)-u((i+1)\Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Or $f_i = f(i\Delta x)$ et $V_i = V(i\Delta x)$ et u est solution de (5) donc $f_i - V_i u(i\Delta x) = -u''(i\Delta x)$.

Pour obtenir ensuite l'inégalité demandée on utilise la formule de Taylor à l'ordre 4 en $i\Delta x$, avec majoration de Taylor-Lagrange du reste sur $[(i-1)\Delta x,(i+1)\Delta x]$. Notons $M_{4,i} = \sup_{[(i-1)\Delta x,(i+1)\Delta x]} |u^{(4)}(x)|$.

On peut écrire

$$\begin{aligned}
u((i+1)\Delta x) &= u(i\Delta x) + (\Delta x)u'(i\Delta x) + \frac{(\Delta x)^2}{2}u''(i\Delta x) + \frac{(\Delta x)^3}{6}u'''(i\Delta x) + \eta^+ \\
u((i-1)\Delta x) &= u(i\Delta x) - (\Delta x)u'(i\Delta x) + \frac{(\Delta x)^2}{2}u''(i\Delta x) - \frac{(\Delta x)^3}{6}u'''(i\Delta x) + \eta^-
\end{aligned}$$

avec

$$|\eta^+| \leq \frac{(\Delta x)^4}{24}M_{4,i} \qquad |\eta^-| \leq \frac{(\Delta x)^4}{24}M_{4,i}.$$

En sommant ces deux égalités

$$\frac{-u((i-1)\Delta x)+2u(i\Delta x)-u((i+1)\Delta x)}{(\Delta x)^2} = -u''(i\Delta x) - \frac{\eta^+ + \eta^-}{(\Delta x)^2}$$

et

$$|\epsilon_i| = \left|\frac{\eta^+ + \eta^-}{(\Delta x)^2}\right| \leq \frac{(\Delta x)^2}{12}M_{4,i}$$

$III.4)$

$$-w_{i+1}+2w_i-w_{i-1} = -v_{i+1}+2v_i-v_{i-1} - \frac{E}{2n^2}\underbrace{\left(-(i-1)(n-(i-1))+2i(n-i)-(i+1)(n-(i+1))\right)}_{=2!}$$

De plus $\Delta x = \frac{1}{n}$ donc

$$\frac{-w_{i+1}+2w_i-w_{i-1}}{(\Delta x)^2} + V_i w_i = \epsilon_i - \frac{V_i E}{2}\frac{i(n-i)}{n^2} - E = \tilde{f}_i$$

avec $\tilde{f}_i \leq \epsilon_i - E \leq 0$. Donc, d'après 3.1, pour tout i $w_i \leq 0$.

$III.5)$ Pour la même raison, en remplaçant E par $-E$ nous aurons $z_i \geq 0$ pour tout i.

$III.6)$ Il résulte des deux inégalités précédentes que $\forall i \in \{0,\ldots,n\}$ $|v_i| \leq \frac{E}{2}\frac{i(n-i)}{n^2}$.

Or, pour tout t de $[0,n]$, $t(n-t) \leq \frac{n^2}{4}$ et $E \leq \frac{1}{12}\left(\max_{x\in[0,1]}|u^{(4)}(x)|\right)(\Delta x)^2$

Par conséquent

$$\forall i \quad |u_i - u(i\Delta x)| = |v_i| \leq \frac{1}{96}\left(\max_{x\in[0,1]}|u^{(4)}(x)|(=M_4)\right)(\Delta x)^2$$

Soit $x\in[0,1]$, pour tout n il existe i_n tel que $\frac{i_n}{n} \leq x \leq \frac{i+1}{n}$ c'est-à-dire $i_n\Delta x \leq x \leq (i_n+1)\Delta x$.

On a donc $\lim i_n\Delta x = x$ et aussi $\lim u(i_n\Delta x) = u(x)$ puisque u est continue. Mais pour tout n $|u_{i_n} - u(i_n\Delta x)| \leq \frac{1}{96}M_4(\Delta x)^2$, donc $\lim u_{i_n} = u(x)$ et la convergence est assez rapide (en $\mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$).

$III.7)$ Puisque $V_i u(i\Delta x) - f_i - u''(i\Delta x) = 0$ on obtient $l_i - u''(i\Delta x) = V_i(u_i - u(i\Delta x))$ donc

$$|l_i - u''(i\Delta x)| \leq \sup_{x\in[0,1]}|V(x)||u_i - u(i\Delta x)|$$

on peut prendre $A = \frac{1}{96}\sup_{x\in[0,1]}|V(x)|$.

$III.8)$ l est la fonction affine par morceaux qui vaut l_i en $i\Delta x$ et est affine sur $[i\Delta x, (i+1)\Delta x]$. Si x est dans $[0,1]$ il existe un unique i tel que i soit dans $[i\Delta x, (i+1)\Delta x]$.

$$\begin{aligned} l(x) - u''(x) &= l_i + \frac{x - i\Delta x}{\Delta x}(l_{i+1} - l_i) - u''(x) \\ &= \frac{(i+1)\Delta x - x}{\Delta x} l_i + \frac{x - i\Delta x}{\Delta x} l_{i+1} - u''(x) \\ &= \frac{(i+1)\Delta x - x}{\Delta x}(l_i - u''(i\Delta x) + \frac{x - i\Delta x}{\Delta x}(l_{i+1} - u''((i+1)\Delta x) + \frac{(i+1)\Delta x - x}{\Delta x}(u''(i\Delta x) + \frac{x - i\Delta x}{\Delta x}(u''((i+1 \end{aligned}$$

On écrit alors la formule de Taylor à l'ordre 2 en x pour u''

$$u''(i\Delta x) = u''(x) + (i\Delta x - x)u'''(x) + \frac{(i\Delta x - x)^2}{2}\eta_i^-$$

avec $|\eta_i^-| \leq M_4$.

De même pour $u''((i+1)\Delta x)$, avec η_i^+.

On reporte dans la dernière inégalité. Les termes en $u''(x)$ et $u'''(x)$ disparaissent.

Puisque

$$0 \leq \frac{(i+1)\Delta x - x}{\Delta x} \leq 1 \text{ et } 0 \leq \frac{x - i\Delta x}{\Delta x} \leq 1$$

l'inégalité triangulaire donne

$$|l(x) - u''(x)| \leq |l_i - u''(i\Delta x)| + |l_{i+1} - u''((i+1)\Delta x)| + \frac{|\eta_i^+| + |\eta_i^-|}{2}(\Delta x)^2$$

On peut prendre $B = 2A + 1$.

$III.9)$ u'' est continue donc $\int_0^y u''(t)\,dt = u'(y) - u'(0)$, une nouvelle intégration donne

$$\int_0^1 (\int_0^y u''(t)dt)dy = u(1) - u(0) - u'(0) = -u'(0)$$

Soit $M = -\int_0^1 (\int_0^y l(t)/, dt)\,dy$

$$|M - u'(0)| \leq \int_0^1 (\int_0^y |l(t) - u''(t)|dt)dy \leq \frac{1}{2}M_4(\Delta x)^2$$

Il reste à vérifier que M est une combinaison linéaire des l_i. Pour cela on commence par intégrer par parties :

$$M = [-(x-1)\int_0^y l(t)\,dt] + \int_0^1 (y-1)l(y)\,dy = +\int_0^1 (y-1)l(y)\,dy$$

On utilise ensuite la relation de Chasles

$$M = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x} (y-1)l(y)\,dy$$

Or sur chaque $[i\Delta x, (i+1)\Delta x]$

$$l(y) = \frac{(i+1)\Delta x - y}{\Delta x} l_i + \frac{y - i\Delta x}{\Delta x} l_{i+1}$$

donc

$$\int_{i\Delta x}^{(i+1)\Delta x} (y-1)l(y)\,dy = A_i l_i + B_i l_{i+1}$$

Avec un peu plus de de courage on pourrait exprimer A_i et B_i. Il m'a manqué !

IV

$IV.1)$

- Si $\psi(\lambda) = 0$ alors u_λ est solution du système (7).
- Réciproquement si le système (7) possède une solution non nulle v alors $v'(0) \neq 0$ (Sinon, d'après le théorème de Cauchy v serait la solution nulle car celle-ci est solution du même problème de Cauchy). Soit $v_1 = \frac{1}{v'(0)}v$ alors v_1 est solution de (7) et $v_1'(0) = 1$ donc $v_1 = u_\lambda$ et $\psi(\lambda) = v_1(1) = 0$.

$IV.2)$ On multiplie chaque membre de (7) par $u(x)$ et on intègre entre 0 et 1.

$$\int_0^1 -u''(x)u(x)\,dx + \int_0^1 V(x)u^2(x)\,dx = \lambda \int_0^1 u^2(x)\,dx$$

La transformation de la première intégrale à l'aide d'une intégration par parties conduit, puisque $u(0) = u(1) = 0$, à :

$$\int_0^1 (u'^2(x) + V(x)u^2(x))\,dx = \lambda \int_0^1 u^2(x)\,dx$$

$IV.3)$ Si $\lambda \leq V_0$ alors $\theta = u'^2 + (V - \lambda)u^2$ est continue et positive. D'après la question précédente sont intégrale est nulle, elle est donc nulle. En particulier u' est nulle or $u(0) = 0$ donc $u = 0$.

En résumé si $\lambda \leq V_0$ la seule solution de (7) est la fonction nulle.

$IV.4)$ On suppose $\lambda > V_0$, on pose $\alpha = \sqrt{\lambda} > 0$, l'équation différentielle peut s'écrire

$$u''(x) + \alpha^2 u(x) = V(x)u(x)$$

En particulier u_λ est solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + \alpha^2 y(x) = V(x)u_\lambda(x)$$

La solution générale de l'équation homogène associée à l'équation précédente est

$$y(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x)$$

On cherche une solution de l'équation avec second membre en utilisant la méthode de la variation des constantes. On se ramène classiquement à

$$\begin{cases} A'(x)\cos(\alpha x) + B'(x)\sin(\alpha x) & = & 0 \\ -\alpha A'(x)\sin(\alpha x) + \alpha B'(x)\cos(\alpha x) & = & V(x)u_\lambda(x) \end{cases}$$

La résolution de ce système donne

$$A'(x) = -\frac{V(x)u_\lambda(x)\sin(\alpha x)}{\alpha} \quad B'(x) = \frac{V(x)u_\lambda(x)\cos(\alpha x)}{\alpha}$$

Les conditions $u_\lambda(0) = 0$ et $u'\lambda(0) = 1$ donnent $A(0) = 0$ et $B(0) = \frac{1}{\alpha}$.

On en déduit

$$A(x) = -\int_0^x \frac{V(t)u_\lambda(t)\sin(\alpha t)}{\alpha}\,dt \qquad B(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^x \frac{V(t)u_\lambda(t)\cos(\alpha t)}{\alpha}\,dt$$

et finalement

$$u_\lambda(x) = A(x)\cos(\alpha x) + B(x)\sin(\alpha x) = \sin(\alpha x)\alpha + \int_0^x \frac{\sin(\alpha(x-s))}{\alpha} V(s)u_\lambda(s)\,ds$$

$IV.5)$ On écrit $u_\lambda(x) = \frac{h_\lambda(x)}{\alpha} + \frac{\sin \alpha x}{\alpha}$ et on injecte dans l'équation intégrale précédente. On obtient le résultat demandé.

$IV.6)$ En utilisant $\left|\int_a^b \tau(s)\,ds\right| \leq (b-a)\sup_{s\in[a,b]} |\tau(s)|$ on obtient directement :

$$\forall x \in [0,1] \quad |h_\lambda(x)| \leq \frac{x}{\alpha} \max_{x\in[0,1]} |V(x)||h_\lambda(x)| + \frac{x}{\alpha} \max_{x\in[0,1]} |V(x)| \leq \frac{1}{\alpha}(\|V\|\|h_\lambda\| + \|V\|)$$

où $\|g\| = \max_{x\in[0,1]} |g(x)|$.

Par conséquent, pour $\lambda \geq (2\|V\|)^2$ on a $\frac{\|V\|}{\alpha} \leq \frac{1}{2}$ et $\|h_\lambda\| \leq \frac{\|h_\lambda\|}{2} + \frac{\|V\|}{\alpha}$ soit $\|h_\lambda\| \leq 2\frac{\|V\|}{\alpha}$

$IV.7)$ On peut donc écrire

$$u_\lambda(1) = \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \mathcal{O}(\frac{1}{\alpha^2})$$

lorsque α tend vers $+\infty$.

En particulier :

$$\psi((\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^2) = u_{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)^2}(1) = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}} + o(\frac{1}{k})$$

est strictement positif pour k assez grand.

$IV.8)$ Pour la même raison

$$\psi((\frac{3\pi}{2}+2k\pi)^2) = u_{(\frac{\pi}{2}+2k\pi)^2}(1) = -\frac{1}{2k\pi+\frac{3\pi}{2}} + o(\frac{1}{k})$$

est strictement négatif pour k assez grand.

$IV.9)$ On utilise la représentation intégrale (8).

$$(*) \qquad g_{\lambda,\mu}(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sin\sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}} + \int_0^x \left(\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-s)}{\sqrt{\lambda}} u_\lambda(s) - \frac{\sin\sqrt{\mu}(x-s)}{\sqrt{\mu}} u_\mu(s) \right) V(s)\,ds$$

Considérons $\gamma_x(t) = \frac{\sin\sqrt{t}x}{\sqrt{t}}$, g_x est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]V_0,+\infty[$ et $\gamma_x'(t) = \frac{x\cos\sqrt{t}x}{2t} - \frac{\sin\sqrt{t}x}{2t\sqrt{t}}$ donc $|\gamma_x'(t)| \le \frac{1}{V_0} + \frac{1}{2V_0\sqrt{V_0}} = c_1$. De l'inégalité des accroissements finis on tire

$$|\gamma_x(\lambda) - \gamma_x(\mu)| \le c_1|\lambda-\mu|$$

(c_1 est indépendant de x).

De plus on peut écrire

$$\gamma_{x-s}(\lambda)u_\lambda(s) - \gamma_{x-s}(\mu)u_\mu(s) = (\gamma_{x-s}(\lambda) - \gamma_{x-s}(\mu))u_\lambda(s) + \gamma_{x-s}(\mu)(u_\lambda(s) - u_\mu(s))$$

Or $|\gamma_{x-s}(\mu)| \le \frac{1}{V_0}$ et u_λ est bornée, a priori par un nombre dépendant de λ. Mais si dans la méthode qui va suivre on remplace $|g_{\lambda,\mu}|$ par $|u_\lambda|$, alors en utilisant l'inégalité

$$|u_\lambda(x)| \le \frac{1}{\sqrt{V_0}} + \int_0^x \frac{\|V\|}{\sqrt{V_0}}|u_\lambda(s)|\,ds$$

on obtiendrait une majoration indépendante de λ.

Finalement, en majorant dans $(*)$

$$|g_{\lambda,\mu}(x)| \le c_1|\lambda-\mu| + \int_0^x \|V\|\|u_\lambda\|c_1|\lambda-\mu| + \frac{\|V\|}{V_0}|g_{\lambda,\mu}(s)|\,ds$$

et, puisque x est dans $[0,1]$:

$$|g_{\lambda,\mu}(x)| \le c_1(1+\|V\|\|u_\lambda\|) + \frac{\|V\|}{V_0}\int_0^x |g_{\lambda,\mu}(s)|\,ds$$

Avec les notation de l'énoncé, et pour des constantes c_2 et c_3 naturelles :

$$\begin{aligned}
I'_{\lambda,\mu}(x) &\le c_2|\lambda-\mu| + c_3 I_{\lambda,\mu}(x) \\
I'_{\lambda,\mu}(x) - c_3 I_{\lambda,\mu}(x) &\le c_2|\lambda-\mu| \\
e^{-c_3x}\left(I'_{\lambda,\mu}(x) - c_3 I_{\lambda,\mu}(x)\right) &\le c_2|\lambda-\mu|e^{-c_3x} \\
\frac{d}{dx}(e^{-c_3x}I_{\lambda,\mu}(x)) &\le c_2|\lambda-\mu|e^{-c_3x} \\
e^{-c_3x}I_{\lambda,\mu}(x) &\le \frac{c_2}{c_3}|\lambda-\mu|(1-e^{-c_3x}) \\
I_{\lambda,\mu}(x) &\le \frac{c_2}{c_3}|\lambda-\mu|(e^{c_3x}-1)
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser cette inégalité dans l'inégalité vérifiée par $g_{\lambda,\mu}$ pour obtenir.

$$|g_{\lambda,\mu}(x)| \le c_2|\lambda-\mu| + c_2|\lambda-\mu|(e^{c_3x}-1) = c_2|\lambda-\mu|e^{c_3x} \le c_2e^{c_3}|\lambda-\mu|$$

$IV.10)$ On vient de voir à la question précédente que (en prenant $x=1$)

$$|u_\lambda(1) - u_\mu(1)| \le c_2|\lambda-\mu|e^{c_3} = c_4|\lambda-\mu|$$

(remarquons que c_4 dépend de λ). En faisant tendre μ vers λ on obtient

$$\lim_{\mu\to\lambda}\psi(\mu) = \psi(\lambda)$$

λ étant quelconque on a bien établi la continuité de ψ sur $]V_0,+\infty[$.

$IV.11)$ Considérons les k_0 et k_1 des questions 4.7 et 4.8 alors pour tout n entier $\psi[(\frac{\pi}{2}+(k_0+k_1+n)(2\pi))^2] > 0$ et $\psi[(\frac{3\pi}{2}+(k_0+k_1+n)(2\pi))^2] < 0$ et ψ est continue, donc il existe λ_n dans $[(\frac{\pi}{2}+(k_0+k_1+n)(2\pi))^2, (\frac{3\pi}{2}+(k_0+k_1+n)(2\pi))^2]$ tel que $\psi(\lambda_n) = 0$. D'après la question 4.1 u_{λ_n} est une solution non nulle du système (7).

Il est clair que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.