A2020 – MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n), dont la matrice unité est notée I_n.
- E_n désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n, 1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = {}^tXY \text{ et } \|X\| = \sqrt{{}^tXX}$$

- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on note ${}^tA$, la transposée de A.
- $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n,\ A{}^tA = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n.
- $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n,\ \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ et $\mathrm{S}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$.
On rappelle que $\mathcal{SO}_2 = \{\mathrm{R}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{\mathrm{S}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 1 *Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $A{}^tA = {}^tAA$.*

Définition 2 *$A \in \mathcal{M}_n$ est dite **orthogonalement semblable à** $B \in \mathcal{M}_n$, s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = {}^tQAQ$. (On pourra noter en abrégé : A est **ORTS** à B)*

Objectifs

- Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

  ($\mathbf{C_1}$) Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que ${}^tA = P(A)$.

  ($\mathbf{C_2}$) La matrice A est normale.

  ($\mathbf{C_3}$) Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^tAX\| = \|AX\|$.

  ($\mathbf{C_4}$) La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

  - soit de taille $(1, 1)$,

— soit de taille $(2,2)$ du type $r\mathrm{R}(\theta)$, où $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

— Dans un second temps, on définit et caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

On pourra utiliser, sans démonstration, les deux résultats suivants :

Théorème 1 *Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une droite ou un plan stable.*

Théorème 2 *Si $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in \mathcal{M}_n$ sont telles qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ vérifiant $B = {}^tQAQ$, alors, pour tout polynôme P à coefficients réels, on a $P(B) = {}^tQP(A)Q$.*

I. Question préliminaire

1. Montrer que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

II. Exemples

2. Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$, $(\mathbf{C_2})$, $(\mathbf{C_3})$ et $(\mathbf{C_4})$, et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$, $(\mathbf{C_2})$ et $(\mathbf{C_3})$.

3. Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions $(\mathbf{C_2})$ et $(\mathbf{C_3})$.

4. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.
   Montrer que les matrices rT, où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, vérifient les conditions $(\mathbf{C_1})$ et $(\mathbf{C_4})$.

III. Deux premières implications

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

5. Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_1})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_2})$.

6. Montrer que si A vérifie la condition $(\mathbf{C_2})$, alors A vérifie la condition $(\mathbf{C_3})$.

IV. La condition $(\mathrm{C_3})$ implique la condition $(\mathrm{C_4})$

Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition $(\mathbf{C_3})$.

7. Montrer que $c = b$ ou bien ($b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d$).
   On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de E_2.
   En déduire que A vérifie la condition $(\mathbf{C_4})$.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition ($\mathbf{C_3}$).

8. Montrer que, pour tout réel λ, la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie ($\mathbf{C_3}$).

9. En déduire que A et ${}^tA$ ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

10. En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.

11. Pour $n \geqslant 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient ($\mathbf{C_3}$), avec $p \in \{1, 2\}$.
On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie ($\mathbf{C_3}$).

12. Montrer que si A vérifie la condition ($\mathbf{C_3}$), alors A vérifie la condition ($\mathbf{C_4}$).

V. La condition $(\mathrm{C_4})$ implique la condition $(\mathrm{C_1})$

Soit $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$, une famille de n complexes deux à deux distincts.

13. Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \qquad P(z_k) = \overline{z_k}$$

On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$.
Montrer alors que le polynôme P est réel.

Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(r\mathrm{e}^{i\theta}) = r\mathrm{e}^{-i\theta}$.

14. Montrer que $P(r\mathrm{R}(\theta)) = {}^t(r\mathrm{R}(\theta))$.
Lorsque $\sin\theta \neq 0$*, on pourra utiliser la division euclidienne de P par le polynôme caractéristique χ de la matrice $rR(\theta)$ de $\mathcal{M}_2$.*

15. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition ($\mathbf{C_4}$), alors A vérifie la condition ($\mathbf{C_1}$).

VI. Exponentielle d'une matrice normale

16. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer que les séries $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |A_{i,j}|$$

17. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(A) = \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k$.

18. Montrer que la suite $(S_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\mathrm{Exp}(A)$, et que :

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n, \qquad \mathrm{Exp}({}^tQAQ) = {}^tQ\,\mathrm{Exp}(A)Q$$

On pourra montrer que, pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant n$, *la série numérique* $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ *est absolument convergente.*

19. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?

20. Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Exp}(r\mathrm{R}(\theta)) = \mathrm{e}^{r\cos\theta}\mathrm{R}(r\sin\theta)$.
En déduire que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ orthogonalement semblable aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

    — soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$

    — soit du type $\alpha\mathrm{R}(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ à valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les deux conditions :

— les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire

— il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

21. Démontrer que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.

22. La matrice $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définie par :

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i+1 = j \leqslant n \ \text{ ou } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est-elle l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$?

Fin du problème