

Mines-Ponts PSI 2020

Mathématiques 2

—
corrige
—

I. Question préliminaire

1. Il s'agit de démontrer que la relation ORTS, définie par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n, A \text{ est ORTS à } B \iff \exists Q \in \mathcal{O}_n, B = {}^tQAQ,$$

est réflexive, symétrique et transitive.

- *Réflexivité* : $\forall A \in \mathcal{M}_n, A$ est ORTS à A , car $I_n \in \mathcal{O}_n$ et $A = {}^tI_nAI_n$.
- *Symétrie* : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n, A$ est ORTS à $B \implies B$ est ORTS à A , car si $Q \in \mathcal{O}_n$ est tel que $B = {}^tQAQ$, alors ${}^tQ = Q^{-1} \in \mathcal{O}_n$ et $A = QB{}^tQ = {}^t({}^tQ)B{}^tQ$.
- *Transitivité* : $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_n, A$ est ORTS à B et B est ORTS à $C \implies A$ est ORTS à C , car si $Q, Q' \in \mathcal{O}_n$ sont tels que $B = {}^tQAQ$ et $C = {}^tQ'BQ'$, alors $QQ' \in \mathcal{O}_n$ et $C = {}^tQ'{}^tQAQQ' = {}^t(QQ')A(QQ')$.

Donc la relation ORTS est bien une relation d'équivalence sur \mathcal{M}_n .

II. Exemples

2. (a) Soit $S \in \mathcal{S}_n$. On a ${}^tS = S$, donc :

(C₁) ${}^tS = S = P(S)$ où P est le monôme $P(X) = X$.

(C₂) S est normale puisqu'elle commute avec ${}^tS = S$.

(C₃) Pour tout $X \in E_n, \|{}^tSX\| = \|SX\|$ de façon évidente.

(C₄) D'après le théorème spectral, S est ORTS à une matrice diagonale, donc diagonale par blocs avec des blocs diagonaux tous de taille $(1, 1)$, donc S vérifie (C₄).

(b) Soit $A \in \mathcal{A}_n$. On a ${}^tA = -A$, donc :

(C₁) ${}^tA = -A = P(A)$ où P est le monôme $P(X) = -X$.

(C₂) A est normale puisqu'elle commute avec ${}^tA = -A$.

(C₃) Pour tout $X \in E_n, \|{}^tAX\| = \|-AX\| = \|AX\|$ par homogénéité de la norme.

3. Soit $Q \in \mathcal{O}_n$. On a ${}^tQ = Q^{-1} \in \mathcal{O}_n$, donc :

(C₂) Q est normale puisqu'elle commute avec ${}^tQ = Q^{-1}$.

(C₃) Pour tout $X \in E_n, \|{}^tQX\| = \|X\| = \|QX\|$ puisque les endomorphismes de E_n canoniquement associés à Q et ${}^tQ = Q^{-1}$ sont des isométries.

Rq. Cela se retrouve par le calcul $\|QX\|^2 = {}^t(QX)QX = {}^tX{}^tQQX = {}^tXX = \|X\|^2$.

4. La matrice $T \in \mathcal{O}_2$ est de type $R(\theta)$ ou $S(\theta)$, où $\theta \in \mathbb{R}$ (voir les rappels de cours en préambule).

(a) Cas $T = S(\theta)$.

Dans ce cas, la matrice $M = rT$ est symétrique réelle, donc d'après la question 2, elle vérifie les conditions (C₁) à (C₄).

(b) Cas $T = R(\theta)$.

Dans ce cas, la matrice $M = rT = rR(\theta)$ vérifie la condition (C₄) de façon évidente (M est ORTS à elle-même), et elle vérifie la condition (C₁) puisque

$${}^tM = r \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = 2r \cos(\theta)I_2 - r \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

donc ${}^tM = P(M)$ où $P(X) = 2r \cos(\theta) - X \in \mathbb{R}[X]$.

Rq. On peut « deviner » ce polynôme en cherchant un de degré 1, ou en se souvenant que pour toute matrice inversible A de taille $(2, 2)$, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{tr}(A)I_2 - A)$, ce qui donne ici ${}^tT = T^{-1} = 2 \cos(\theta)I_2 - T$, ou en regardant la question 14 de la partie V.

III. Deux premières implications

5. Si A vérifie **(C₁)**, alors A vérifie **(C₂)** puisque la matrice A commute avec tout polynôme en A .

6. Supposons que A vérifie **(C₂)**, i.e. que $A {}^tA = {}^tAA$. Alors pour tout $X \in E_n$:

$$\|{}^tAX\|^2 = {}^t({}^tAX){}^tAX = {}^tXA {}^tAX \stackrel{\text{(C}_2\text{)}}{=} {}^tX {}^tAA X = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2.$$

Donc $\forall X \in E_n$, $\|{}^tAX\| = \|AX\|$ (puisque les normes sont positives), i.e. A vérifie **(C₃)**.

IV. La condition (C₃) implique la condition (C₄)

7. On suppose que $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifie la condition **(C₃)**, i.e. que $\forall X \in E_2$, $\|{}^tAX\| = \|AX\|$.

(a) Montrons qu'on a nécessairement $b = c$ ou $(b = -c \neq 0 \text{ et } a = d)$.

- Pour $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, on a $\|AX\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \|{}^tAX\| = \sqrt{a^2 + c^2}$, donc $b^2 = c^2$, i.e. $b = \pm c$.

Si $b = c$, alors on a le résultat voulu.

- Sinon, alors $b = -c \neq 0$ et pour $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, on a alors :

$$\|{}^tAX\|^2 = (a + b)^2 + (d - b)^2 = \|AX\|^2 = (a - b)^2 + (b + d)^2$$

i.e. après simplification $(a - d)b = (d - a)b$, et donc $a = d$ puisque $b \neq 0$.

On a donc bien nécessairement $b = c$ ou $(b = -c \neq 0 \text{ et } a = d)$.

(b) • Si $b = c$, alors A est symétrique réelle donc A vérifie **(C₄)** d'après la question 2.
• Si $b = -c \neq 0$ et $a = d$, alors

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = rR(\theta) = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ sont tels que $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$, i.e. où r et θ sont respectivement le module et un argument du complexe $a + ib$ (on a bien $r > 0$ car $b \neq 0$).

Donc dans ce cas, A vérifie **(C₄)** de façon évidente (A est ORTS à elle-même).

Dans tous les cas, la matrice A vérifie donc bien la condition **(C₄)**.

8. **Rq.** Les deux méthodes ci-dessous présentent les mêmes calculs sous deux formes différentes.

Méthode 1.

Les identités remarquables $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \pm 2(u|v)$ donnent, pour tout $X \in E_n$:

- $\|(A - \lambda I_n)X\|^2 = \|AX - \lambda X\|^2 = \|AX\|^2 + \lambda^2\|X\|^2 - 2\lambda(AX|X)$, et
- $\|({}^tA - \lambda I_n)X\|^2 = \|({}^tA - \lambda I_n)X\|^2 = \|{}^tAX - \lambda X\|^2 = \|{}^tAX\|^2 + \lambda^2\|X\|^2 - 2\lambda({}^tAX|X)$.

Or $(AX|X) = {}^t(AX)X = {}^tX {}^tAX = (X|{}^tAX) = ({}^tAX|X)$, et on suppose que A vérifie (\mathbf{C}_3) , donc $\|AX\|^2 = \|{}^tAX\|^2$. Ainsi $\forall X \in E_n$, $\|(A - \lambda I_n)X\| = \|{}^t(A - \lambda I_n)X\|$ (car les normes sont positives), i.e. $A - \lambda I_n$ vérifie (\mathbf{C}_3) .

Méthode 2.

En revenant à la définition de la norme associée au produit scalaire, on a, pour tout $X \in E_n$:

- $\|(A - \lambda I_n)X\|^2 = {}^tX ({}^tA - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)X = {}^tX ({}^tAA - \lambda A - \lambda {}^tA + \lambda^2 I_n)X$.
 $= {}^tX {}^tAAX - \lambda {}^tXAX - \lambda {}^tX {}^tAX + \lambda^2 {}^tXX$
- $\|{}^t(A - \lambda I_n)X\|^2 = {}^tX (A - \lambda I_n)({}^tA - \lambda I_n)X = {}^tX (A {}^tA - \lambda A - \lambda {}^tA + \lambda^2 I_n)X$.
 $= {}^tXA {}^tAX - \lambda {}^tXAX - \lambda {}^tX {}^tAX + \lambda^2 {}^tXX$

Or A vérifie (\mathbf{C}_3) donc ${}^tX {}^tAAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2 = \|{}^tAX\|^2 = {}^t({}^tAX) {}^tAX = {}^tXA {}^tAX$. Ainsi $\forall X \in E_n$, $\|(A - \lambda I_n)X\| = \|{}^t(A - \lambda I_n)X\|$ (car les normes sont positives), i.e. $A - \lambda I_n$ vérifie (\mathbf{C}_3) .

9. (a) Vu la question précédente (et la séparation de la norme), pour tout $X \in E_n$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_n)X = 0_{E_n} &\iff \|(A - \lambda I_n)X\| = 0 \\ &\iff \|{}^t(A - \lambda I_n)X\| = 0 \\ &\iff {}^t(A - \lambda I_n)X = ({}^tA - \lambda I_n)X = 0_{E_n}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \text{Ker}({}^tA - \lambda I_n)$, et donc les matrices A et tA ont les mêmes sous-espaces propres.

(b) Soient $\lambda \neq \mu$ dans \mathbb{R} et soient $X \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ et $Y \in \text{Ker}(A - \mu I_n) = \text{Ker}({}^tA - \mu I_n)$. Alors $AX = \lambda X$ et ${}^tAY = \mu Y$, donc :

$$\lambda(X|Y) = (AX|Y) = {}^t(AX)Y = {}^tX {}^tAY = (X|{}^tAY) = \mu(X|Y)$$

et donc $(X|Y) = 0$ puisque $\lambda \neq \mu$.

Les sous-espaces propres de A sont donc bien deux à deux orthogonaux.

10. Montrons que A , qui vérifie (\mathbf{C}_3) , est diagonalisable si et seulement si elle est symétrique.

- Si A est symétrique, alors A est diagonalisable d'après le théorème spectral.
- Supposons A diagonalisable. Alors ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans E_n (caractérisation de la diagonalisabilité), et d'après la question 9, ils sont deux à deux orthogonaux.

En concaténant des bases orthonormales des sous-espaces propres de A , on obtient donc une base orthonormale de diagonalisation de A , donc la matrice de passage P de la base canonique à cette base de diagonalisation est orthogonale et telle que $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$ est diagonale.

Ainsi $A = PD {}^tP$ est symétrique puisque ${}^tA = {}^t(PD {}^tP) = P {}^tD {}^tP = PD {}^tP = A$.

11. (a) Montrons comme indiqué que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie (\mathbf{C}_3) .

Soient $Q \in \mathcal{O}_n$ et $B = {}^tQAQ$. Alors pour tout $X \in E_n$, sachant que $Q {}^tQ = {}^tQQ = I_n$:

- $\|BX\|^2 = {}^t(BX)BX = {}^tX {}^tBBX = {}^tX {}^tQ {}^tAQ {}^tQAQX = {}^tX {}^tQ {}^tAAQX = \|AQX\|^2$
- $\|{}^tBX\|^2 = {}^t({}^tBX) {}^tBX = {}^tXB {}^tBX = {}^tX {}^tQAQ {}^tQ {}^tAQX = {}^tX {}^tQA {}^tAQX = \|{}^tAQX\|^2$

Or A vérifie (\mathbf{C}_3) et $QX \in E_n$, donc $\|AQX\| = \|{}^tAQX\|$. Ainsi $\forall X \in E_n$, $\|BX\| = \|{}^tBX\|$ (car les normes sont positives), i.e. B vérifie (\mathbf{C}_3) .

(b) Montrons que A est ORTS à une matrice de type $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient (\mathbf{C}_3) , avec $p \in \{1, 2\}$.

- D'après le théorème 1 du préambule, l'endomorphisme f de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A admet une droite ou un plan stable. Notons F ce sous-espace stable, $p \in \{1, 2\}$ sa dimension, et Q la matrice de passage de la base canonique de \mathbb{R}^n à une base orthonormale de \mathbb{R}^n adaptée à F (i.e. commençant par une base orthonormale de F).

Alors Q est orthogonale (comme matrice de passage entre deux bases orthonormales) et la matrice $B = Q^{-1}AQ = {}^tQAQ$ est la matrice de f dans une base adaptée au sous-espace stable F , donc est triangulaire supérieure par blocs, de type

$$B = {}^tQAQ = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

où $A_1 \in \mathcal{M}_p$, $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ et où A_3 est une matrice réelle de taille $(p, n-p)$.

- Montrons que $A_3 = 0$.

D'après l'indication montrée en (a), la matrice B vérifie la condition **(C₃)**, donc $\forall X \in E_n$, $\|BX\|^2 = \|{}^tBX\|^2$, i.e. en explicitant ces calculs de normes comme en (a) :

$$(\star) : \quad \forall X \in E_n, \quad {}^tX{}^tBBX = {}^tXB{}^tBX.$$

Or pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$ et tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, en notant e_i le i -ème élément de la base canonique de E_n (i.e. la colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf le i -ème qui vaut 1), le calcul ${}^te_i M e_i$ donne le i -ème coefficient diagonal $(M)_{i,i}$ de M .

Vu (\star) , les matrices tBB et $B{}^tB$ ont donc les mêmes coefficients diagonaux. Or un calcul par blocs donne

$${}^tBB = \begin{bmatrix} {}^tA_1A_1 & {}^tA_1A_3 \\ {}^tA_3A_1 & {}^tA_3A_3 + {}^tA_2A_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B{}^tB = \begin{bmatrix} A_1{}^tA_1 + A_3{}^tA_3 & A_3{}^tA_2 \\ A_2{}^tA_3 & A_2{}^tA_2 \end{bmatrix}$$

donc les égalités des coefficients diagonaux de tBB et $B{}^tB$ donnent en particulier, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $({}^tA_1A_1)_{i,i} = (A_1{}^tA_1)_{i,i} + (A_3{}^tA_3)_{i,i}$ et donc en sommant ces égalités :

$$\text{tr}({}^tA_1A_1) = \text{tr} A_1{}^tA_1 + \text{tr}(A_3{}^tA_3).$$

Or par propriété usuelle de la trace, on a $\text{tr}({}^tA_1A_1) = \text{tr}(A_1{}^tA_1)$, et donc :

$$\text{tr}(A_3{}^tA_3) = \text{tr}({}^tA_3A_3) = \|A_3\|^2 = 0$$

où l'on a encore noté $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire usuel $(M, N) \mapsto \text{tr}({}^tMN)$ sur $\mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{R})$. Ainsi $\|A_3\| = 0$, et donc $A_3 = 0$ (par séparation de la norme).

Ainsi A est orthogonalement semblable à la matrice $B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$.

- Montre que A_1 et A_2 vérifient **(C₃)**.

En calculant par blocs les produits de l'égalité (\star) ci-dessus, avec $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ où $X_1 \in E_p$ et $X_2 \in E_{n-p}$, on obtient :

$$\forall (X_1, X_2) \in E_p \times E_{n-p}, \quad {}^tX_1{}^tA_1A_1X_1 + {}^tX_2{}^tA_2A_2X_2 = {}^tX_1A_1{}^tA_1X_1 + {}^tX_2A_2{}^tA_2X_2.$$

En considérant successivement les cas où $X_2 = 0$ puis $X_1 = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} \forall X_1 \in E_p, & {}^tX_1{}^tA_1A_1X_1 = {}^tX_1A_1{}^tA_1X_1, & \text{i.e. } \|A_1X_1\|^2 = \|{}^tA_1X_1\|^2 \\ \forall X_2 \in E_{n-p}, & {}^tX_2{}^tA_2A_2X_2 = {}^tX_2A_2{}^tA_2X_2 & \text{i.e. } \|A_2X_2\|^2 = \|{}^tA_2X_2\|^2 \end{cases}$$

où l'on a encore noté $\|\cdot\|$ les normes associées aux produits scalaires usuels sur E_p et E_{n-p} . Ainsi $\forall X_1 \in E_p$, $\|A_1X_1\| = \|{}^tA_1X_1\|$ et $\forall X_2 \in E_{n-p}$, $\|A_2X_2\| = \|{}^tA_2X_2\|$ (car les normes sont positives), i.e. A_1 et A_2 vérifient **(C₃)**.

12. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\forall A \in \mathcal{M}_n$, A vérifie $(\mathbf{C}_3) \implies A$ vérifie (\mathbf{C}_4) .

- *Initialisation.*

Le cas $n = 1$ est trivial puisque toute matrice de \mathcal{M}_1 vérifie (\mathbf{C}_3) et (\mathbf{C}_4) .

Le cas $n = 2$ a été démontré en question 7.

- *Hérédité.*

Soit $n \geq 3$ tel que toute matrice carrée de taille $\leq n - 1$ vérifiant (\mathbf{C}_3) vérifie aussi (\mathbf{C}_4) .

Soit alors $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant (\mathbf{C}_3) .

D'après la question 11, A est orthogonalement semblable à une matrice $B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient (\mathbf{C}_3) , avec $p \in \{1, 2\}$. Par hypothèse de récurrence, les matrices A_1 et A_2 vérifient donc aussi (\mathbf{C}_4) , i.e. sont ORTS à des matrices B_1 et B_2 diagonales par blocs avec des blocs diagonaux de type (λ) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

Notons $Q_1 \in \mathcal{O}_p$ et $Q_2 \in \mathcal{O}_{n-p}$ des matrices telles que $B_1 = {}^tQ_1 A_1 Q_1$ et $B_2 = {}^tQ_2 A_2 Q_2$. Alors un calcul par blocs donne :

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tQ_1 & 0 \\ 0 & {}^tQ_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

et la matrice $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$ est orthogonale puisque

$${}^tQ Q = \begin{bmatrix} {}^tQ_1 & 0 \\ 0 & {}^tQ_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^tQ_1 Q_1 & 0 \\ 0 & {}^tQ_2 Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{bmatrix} = I_n.$$

Ainsi par transitivité de la relation ORTS, A est ORTS à la matrice $\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$, qui est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (λ) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$, puisque c'est le cas de B_1 et B_2 . Ainsi A vérifie (\mathbf{C}_4) .

- *Conclusion.*

On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie (\mathbf{C}_3) , alors A vérifie (\mathbf{C}_4) .

V. La condition (\mathbf{C}_4) implique la condition (\mathbf{C}_1)

13. (a) *Méthode 1.*

L'application $\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{C}^n$, $P \mapsto (P(z_1), \dots, P(z_n))$, est clairement linéaire et injective (car le seul polynôme de degré $\leq n - 1$ admettant n racines distinctes est le polynôme nul). Et comme les espaces $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et \mathbb{C}^n sont de même dimension finie (à savoir n), l'application φ est un isomorphisme.

Ainsi le n -uplet $(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \in \mathbb{C}^n$ a un unique antécédent par φ . Autrement dit, il existe un unique $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $P(z_k) = \bar{z}_k$.

Méthode 2 (constructive, avec les polynômes de Lagrange).

Considérons, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, le polynôme L_k défini par $L_k(X) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{X - z_j}{z_k - z_j}$.

Par construction, L_k est de degré $n - 1$, admet les z_j pour $j \neq k$ comme racines, et vaut 1 en z_k .

De plus si des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ sont tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k L_k = 0$, alors en évaluant en z_j , où $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on trouve $\lambda_j = 0$, donc la famille (L_1, \dots, L_n) est libre, et est donc une base de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ au vu de son cardinal.

Ainsi tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ se décompose de façon unique comme combinaison linéaire

$$P = \sum_{k=1}^n \lambda_k L_k,$$

où $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, et l'on a alors, à nouveau en évaluant en z_j , $P(z_j) = \lambda_j$, donc :

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(z_j) = \overline{z_j} \iff \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_j = \overline{z_j}.$$

D'où l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(z_j) = \overline{z_j}$: c'est l'unique polynôme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dont les coordonnées dans la base (L_1, \dots, L_n) sont les scalaires $\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n}$.

(b) On suppose de plus que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \overline{z_k} \in Z$, donc on a aussi $P(\overline{z_k}) = \overline{\overline{z_k}} = z_k$.

Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ revient à montrer que $\overline{P} = P$, où \overline{P} est le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P . Et vu l'unicité montrée en (a), il suffit pour cela de montrer que pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \overline{P}(z_k) = \overline{z_k}$.

Or il est clair que pour tout $z \in \mathbb{C}, \overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$, donc pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \overline{P}(z_k) = \overline{P(\overline{z_k})} = \overline{z_k}$.

On a donc bien $\overline{P} = P$, i.e. $P \in \mathbb{R}[X]$.

14. Notons $\chi(X) = X^2 - \text{tr}(rR(\theta))X + \det(rR(\theta)) = X^2 - 2r \cos(\theta)X + r^2 = (X - re^{i\theta})(X - re^{-i\theta})$ le polynôme caractéristique de la matrice $rR(\theta)$, et

$$P(X) = \chi(X)B(X) + aX + b$$

la division euclidienne de P par χ , où $B \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Puisque $\chi(re^{i\theta}) = 0$, on a $P(re^{i\theta}) = are^{i\theta} + b = re^{-i\theta}$, i.e. en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$ar \cos(\theta) + b = r \cos(\theta) \quad \text{et} \quad ar \sin(\theta) = -r \sin(\theta).$$

Et comme χ est annulateur de $rR(\theta)$ (par le théorème de Cayley-Hamilton ou par calcul direct), on obtient :

$$P(rR(\theta)) = arR(\theta) + bI_2 = \begin{bmatrix} ar \cos(\theta) + b & -ar \sin(\theta) \\ ar \sin(\theta) & ar \cos(\theta) + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) & r \sin(\theta) \\ -r \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{bmatrix} = {}^t(rR(\theta)).$$

Rq. Si $\sin(\theta) = 0$, alors $P(r \cos(\theta)) = r \cos(\theta)$, et $rR(\theta) = r \cos(\theta)I_2$, donc de façon évidente, $P(rR(\theta)) = rR(\theta) = {}^t(rR(\theta))$. Mais il n'est pas nécessaire de distinguer ce cas dans les calculs précédents.

15. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant (C_4) , i.e. A est orthogonalement semblable à une matrice $B \in \mathcal{M}_n$ diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (λ) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

Soit alors $Q \in \mathcal{O}_n$ telle que $B = {}^tQAQ$, i.e. telle que $A = QB{}^tQ$.

Notons $(\lambda_1), \dots, (\lambda_p)$ les (éventuels) blocs diagonaux de B de taille $(1, 1)$, et $r_1R(\theta_1), \dots, r_qR(\theta_q)$ les (éventuels) blocs diagonaux de B de taille $(2, 2)$, et posons :

$$Z = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p, r_1e^{i\theta_1}, r_1e^{-i\theta_1}, \dots, r_qe^{i\theta_q}, r_qe^{-i\theta_q}\}.$$

Par construction, pour tout $z \in Z$, on a $\overline{z} \in Z$, et donc d'après la question 13, appliquée en notant z_1, \dots, z_n les éléments deux à deux distincts de la liste $\lambda_1, \dots, \lambda_p, r_1e^{i\theta_1}, r_1e^{-i\theta_1}, \dots, r_qe^{i\theta_q}, r_qe^{-i\theta_q}$, il existe un polynôme réel P tel que pour tout $z \in Z, P(z) = \overline{z}$, i.e. tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket, P(\lambda_k) = \lambda_k \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1; q \rrbracket, P(r_k e^{i\theta_k}) = r_k e^{-i\theta_k}.$$

D'après la question 14, on a alors $\forall k \in \llbracket 1; q \rrbracket, P(r_k R(\theta_k)) = {}^t(r_k R(\theta_k))$, et donc par un calcul par blocs, $P(B) = {}^tB$. On conclut alors avec le théorème 2 du préambule que :

$$P(A) = QP(B) {}^tQ = Q {}^tB {}^tQ = {}^t(QB {}^tQ) = {}^tA.$$

Donc A vérifie (C_1) .

Rq. On a ainsi montré par les questions 5, 6, 12 et 15 que les conditions $(C_1), (C_2), (C_3)$ et (C_4) sont équivalentes, donc le premier objectif du problème est atteint.

VI. Exponentielle d'une matrice normale

16. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} \right| \leq \frac{|r|^k}{k!}$ et $\left| \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} \right| \leq \frac{|r|^k}{k!}$, et la série exponentielle $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{|r|^k}{k!}$ converge, donc par comparaison, les séries $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent absolument, donc convergent.

(b) Par linéarité de la somme des séries convergentes, puisque $\cos(k\theta) + i \sin(k\theta) = e^{ik\theta}$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(re^{i\theta})^k}{k!} = e^{re^{i\theta}} = e^{r \cos(\theta)} e^{ir \sin(\theta)}$$

donc en séparant les parties réelle et imaginaire :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} = e^{r \cos(\theta)} \cos(r \sin \theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} = e^{r \cos(\theta)} \sin(r \sin \theta).$$

17. Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, de sorte que $AB = (c_{i,j})$ où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$.

Alors $\forall (i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, $|c_{i,j}| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \|B\|_\infty = n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

Donc $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$.

18. Comme suggéré par l'énoncé, on note $(M)_{i,j}$ le coefficient d'indices (i,j) d'une matrice M .

Rappels. On rappelle qu'une suite $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{M}_n converge vers une matrice M dans \mathcal{M}_n si et seulement si pour tout $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, la suite de terme général $(M_p)_{i,j}$ converge vers $M_{i,j}$.

- (a) Montrer que la suite $(S_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans \mathcal{M}_n revient à montrer que pour tout $(i,j) \in \llbracket 1;n \rrbracket^2$, la suite de terme général $(S_p(A))_{i,j} = \sum_{k=0}^p \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ converge, i.e. que la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ converge.

Or par récurrence immédiate à partir de la question 17, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|A^k\|_\infty \leq (n \|A\|_\infty)^k$, donc

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{(A^k)_{i,j}}{k!} \right| \leq \frac{\|A^k\|_\infty}{k!} \leq \frac{(n \|A\|_\infty)^k}{k!},$$

et la série exponentielle $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(n \|A\|_\infty)^k}{k!}$ converge, donc par comparaison, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ converge absolument, donc converge.

Ainsi la suite $(S_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge bien dans \mathcal{M}_n .

- (b) Soit $Q \in \mathcal{O}_n$. Par le théorème 2 du préambule, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$S_p({}^tQAQ) = {}^tQS_p(A)Q.$$

Or par définition de l'exponentielle d'une matrice donnée en (a), on a $S_p({}^tQAQ) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \text{Exp}({}^tQAQ)$.

Et vu la définition du produit matriciel (ou puisque l'application $M \mapsto {}^tMQM$ est continue car linéaire en dimension finie, ou via la question 17), on a ${}^tQS_p(A)Q \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} {}^tQ \text{Exp}(A)Q$.

Donc par unicité de la limite :

$$\text{Exp}({}^tQAQ) = {}^tQ \text{Exp}(A)Q.$$

19. (a) Par caractérisation séquentielle des fermés, montrer que \mathcal{E}_n est fermé revient à montrer que pour toute suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{E}_n convergeant vers une matrice $B \in \mathcal{M}_n$, on a $B \in \mathcal{E}_n$.

Mais si $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} B$, alors de façon évidente, ${}^t A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} {}^t B$ (on peut aussi invoquer la continuité de la transposition, qui est continue car linéaire en dimension finie), et donc vu la définition du produit matriciel (ou via la question 17) :

$$A_p {}^t A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} B {}^t B \quad \text{et} \quad {}^t A_p A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} {}^t B B.$$

Ainsi si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p \in \mathcal{E}_n$, i.e. si $A_p {}^t A_p = {}^t A_p A_p$, alors en passant à la limite, $B {}^t B = {}^t B B$, i.e. $B \in \mathcal{E}_n$.

On a donc montré par caractérisation séquentielle que \mathcal{E}_n est une partie fermée de \mathcal{M}_n .

- (b) Si $A \in \mathcal{E}_n$, i.e. si A et ${}^t A$ commutent, alors tout polynôme en A commute avec tout polynôme en ${}^t A$, donc en particulier, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A)$ et $P({}^t A) = {}^t(P(A))$ commutent, i.e. $P(A) \in \mathcal{E}_n$. Ainsi si $A \in \mathcal{E}_n$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p(A) \in \mathcal{E}_n$, et donc par (a), $\text{Exp}(A) \in \mathcal{E}_n$.

20. (a) On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R(\theta)^k = R(k\theta)$. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_p(rR(\theta)) = \sum_{k=0}^p \frac{r^k}{k!} R(k\theta) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^p \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} & - \sum_{k=0}^p \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} \\ \sum_{k=0}^p \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!} & \sum_{k=0}^p \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} \end{bmatrix}.$$

Ainsi vu la question 16 :

$$\text{Exp}(rR(\theta)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} S_p(rR(\theta)) = e^{r \cos(\theta)} \begin{bmatrix} \cos(r \sin \theta) & - \sin(r \sin \theta) \\ \sin(r \sin \theta) & \cos(r \sin \theta) \end{bmatrix} = e^{r \cos(\theta)} R(r \sin \theta).$$

- (b) Notons \mathcal{G}_n l'ensemble des matrices de \mathcal{M}_n qui sont ORTS à une matrice diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu, \alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On montre que $\text{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{G}_n$ par double inclusion.

- Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Montrons que $\text{Exp}(A) \in \mathcal{G}_n$.

Les conditions **(C₂)** et **(C₄)** étant équivalentes, A est ORTS à une matrice B diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (λ) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\lambda, \theta \in \mathbb{R}$.

D'après la question 18, $\text{Exp}(A)$ est alors ORTS à $\text{Exp}(B)$.

Mais pour tout $p \in \mathbb{N}$, un calcul par blocs montre que la matrice $S_p(B)$ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type $S_p((\lambda)) = \left(\sum_{k=0}^p \frac{\lambda^k}{k!} \right)$ ou $S_p(rR(\theta))$, donc en passant à la limite

quand $p \rightarrow +\infty$, on voit avec (a) que $\text{Exp}(B)$ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (e^λ) ou $\text{Exp}(rR(\theta)) = e^{r \cos(\theta)} R(r \sin \theta)$.

Comme $\mu = e^\lambda > 0$, $\alpha = e^{r \cos(\theta)} > 0$, et $\beta = r \sin \theta \in \mathbb{R}$, cela montre que $\text{Exp}(A) \in \mathcal{G}_n$.

D'où l'inclusion $\text{Exp}(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{G}_n$.

- Soit $M \in \mathcal{G}_n$. Montrons l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{E}_n$ telle que $M = \text{Exp}(A)$.

Puisque $M \in \mathcal{G}_n$, M est ORTS à une matrice N diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu, \alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Soit alors $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $N = {}^t Q M Q$, i.e. $M = Q N {}^t Q$.

Puisque $R(0) = R(2\pi) = I_2$, on peut supposer que pour chaque bloc diagonal de type $\alpha R(\beta)$ dans N , on a $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$, quitte à changer $\beta = 0$ en $\beta = 2\pi$, ou à voir le bloc $R(0) = I_2$ comme deux blocs (1) de taille $(1, 1)$.

Soit alors $B \in \mathcal{M}_n$ la matrice diagonale par blocs déduite de N en remplaçant :

- * chaque bloc diagonal de type (μ) de N par un bloc (λ) où $\lambda = \ln(\mu)$,
- * chaque bloc diagonal de type $\alpha R(\beta)$ de N par un bloc $rR(\theta)$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ sont respectivement le module et un argument du complexe $\ln(\alpha) + i\beta$, qui est non nul puisqu'on a supposé $(\alpha, \beta) \neq (1, 0)$ (ce qui garantit que $r = |\ln(\alpha) + i\beta| > 0$ et que θ est bien défini modulo 2π), de sorte que $r \cos(\theta) = \ln(\alpha)$, i.e. $e^{r \cos(\theta)} = \alpha$, et $r \sin(\theta) = \beta$.

Et soit enfin $A = QB \text{ }^t Q$, de sorte que $B = \text{ }^t Q A Q$.

Alors par définition, A est ORTS à B qui est du type décrit en (\mathbf{C}_4) , donc A vérifie (\mathbf{C}_4) , i.e. $A \in \mathcal{E}_n$ puisque les conditions (\mathbf{C}_4) et (\mathbf{C}_2) sont équivalentes.

Et vu la question 18, $\text{Exp}(B) = \text{ }^t Q \text{Exp}(A) Q$. Mais vu les calculs faits dans le point précédent, on a $\text{Exp}(B) = N$, donc

$$\text{Exp}(A) = Q \text{Exp}(B) \text{ }^t Q = Q N \text{ }^t Q = M.$$

Ainsi $M \in \text{Exp}(\mathcal{E}_n)$. D'où l'inclusion $\mathcal{G}_n \subset \text{Exp}(\mathcal{E}_n)$.

- On a donc bien, par double inclusion, $\text{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{G}_n$.

21. Vu la question 20, il s'agit de démontrer que $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n$, avec la notation \mathcal{G}_n qui y est introduite. On procède par double inclusion.

- Soit $M \in \mathcal{G}_n$, i.e. $M \in \mathcal{M}_n$ et M est ORTS à une matrice N diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu, \alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Et soit $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $N = \text{ }^t Q M Q$.

Montrons que $M \in \mathcal{F}_n$.

- Montrons que les valeurs propres négatives de M sont de multiplicité paire.

Puisque les matrices M et N sont semblables, elles ont les mêmes valeurs propres, et un calcul par blocs montre que le polynôme caractéristique de N est un produit de termes de type :

* $X - \mu$ pour chaque bloc diagonal de N de type (μ) , et

* $\chi_{\alpha R(\beta)} = X^2 - \text{tr}(\alpha R(\beta))X + \det(\alpha R(\beta)) = X^2 - 2\alpha \cos(\beta)X + \alpha^2 = (X - \alpha e^{i\beta})(X - \alpha e^{-i\beta})$ pour chaque bloc diagonal de N de type $\alpha R(\beta)$ (calcul déjà fait en question 14).

Les valeurs propres de M sont donc les réels $\mu > 0$ pour chaque bloc diagonal de N de type (μ) , et les complexes $\alpha e^{\pm i\beta}$ pour chaque bloc diagonal de N de type $\alpha R(\beta)$.

Les valeurs propres négatives de M sont donc les éventuels $\alpha e^{\pm i\beta}$ où $\beta \equiv \pi [2\pi]$, auquel cas $\alpha e^{i\beta} = \alpha e^{-i\beta} = -\alpha$. Ces valeurs propres sont donc de multiplicité paire, chaque bloc $\alpha R(\pi)$ apportant deux copies de la valeur propre $-\alpha$.

- Montrons que $M = ST = TS$ où $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$.

Un calcul par blocs montre que $N = S_1 T_1 = T_1 S_1$, où les matrices diagonales par blocs S_1 et T_1 se déduisent de N en remplaçant :

- * chaque bloc diagonal de type (μ) de N par un bloc (μ) dans S_1 et un bloc (1) dans T_1 ,
- * chaque bloc diagonal de type $\alpha R(\beta)$ de N par un bloc αI_2 dans S_1 et un bloc $R(\beta)$ dans T_1 .

On a alors $S_1 \in \mathcal{S}_n^{++}$ de façon évidente (car S_1 est diagonale et à coefficients diagonaux strictement positifs), et $T_1 \in \mathcal{SO}_n$ puisque des calculs par blocs montrent que $\text{ }^t T_1 T_1 = I_n$ et $\det(T_1) = 1$. Et on a alors $M = Q N \text{ }^t Q = (Q S_1 \text{ }^t Q)(Q T_1 \text{ }^t Q) = (Q T_1 \text{ }^t Q)(Q S_1 \text{ }^t Q)$, i.e.

$$M = ST = TS$$

où $S = Q S_1 \text{ }^t Q \in \mathcal{S}_n^{++}$ puisque $\text{ }^t S = \text{ }^t (Q S_1 \text{ }^t Q) = Q \text{ }^t S_1 \text{ }^t Q = Q S_1 \text{ }^t Q = S$ et que S et S_1 sont semblables donc ont les mêmes valeurs propres, et où $T = Q T_1 \text{ }^t Q \in \mathcal{SO}_n$ puisqu'un produit de matrices orthogonales est une matrice orthogonale et que T et T_1 sont semblables donc ont le même déterminant.

Donc par définition, $M \in \mathcal{F}_n$. D'où l'inclusion $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$.

- Soit $B \in \mathcal{F}_n$, i.e. B a toutes ses (éventuelles) valeurs propres négatives de multiplicité paire, et $B = ST = TS$ où $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$.

Montrons que $B \in \mathcal{G}_n$, i.e. en notant b l'endomorphisme de E_n canoniquement associé à B , qu'il existe une base orthonormale \mathcal{B} de E_n dans laquelle la matrice B' de b est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu, \alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- Notons respectivement s et t les endomorphismes de E_n canoniquement associés à S et T . Par hypothèse, s est un endomorphisme symétrique à valeurs propres strictement positives, et t est une rotation (i.e. une isométrie de déterminant 1) de E_n . Comme s est symétrique, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, et d'après le théorème spectral, ils sont supplémentaires dans E_n .

- Soit $\lambda > 0$ une valeur propre de s .

Comme t commute avec s (car $ST = TS$), t stabilise le sous-espace propre $\text{Ker}(S - \lambda I_n)$ de s , et comme t est une isométrie, l'endomorphisme t_λ induit par t sur $\text{Ker}(S - \lambda I_n)$ est encore une isométrie, de sorte que sa matrice T_λ dans une base orthonormale de $\text{Ker}(S - \lambda I_n)$ est une matrice orthogonale.

Mais alors T_λ vérifie **(C₂)** (cf. question 3), donc aussi **(C₄)** (ces conditions étant équivalentes). Autrement dit, il existe une base orthonormale \mathcal{B}_λ de $\text{Ker}(S - \lambda I_n)$ dans laquelle la matrice T'_λ de t_λ est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (ν) ou $rR(\theta)$, où $r > 0$ et $\nu, \theta \in \mathbb{R}$. De plus comme T'_λ est inversible (car t_λ l'est puisque c'est une isométrie), les blocs diagonaux de type (ν) de T'_λ sont nécessairement tous non nuls.

Rq. Plus précisément, les blocs diagonaux de T'_λ de taille $(1, 1)$ sont égaux à (± 1) , et ceux de taille $(2, 2)$ sont de type $R(\theta)$ (i.e. avec $r = 1$) puisque T'_λ est orthogonale (comme matrice d'une isométrie dans une base orthonormale), donc ses colonnes sont normées.

Cela généralise la réduction des isométries en dimension ≤ 3 , au programme de la classe PSI, au cas des isométries en dimension finie arbitraire.

Comme l'endomorphisme s_λ induit par s sur $\text{Ker}(S - \lambda I_n)$ est l'homothétie de rapport λ , sa matrice dans la base \mathcal{B}_λ (comme dans toute base) est λI_p où $p = \dim \text{Ker}(S - \lambda I_n)$.

Ainsi $b = s \circ t = t \circ s$ stabilise $\text{Ker}(S - \lambda I_n)$ et y induit un endomorphisme b_λ dont la matrice dans la base \mathcal{B}_λ est $\lambda T'_\lambda$, donc est diagonale par blocs de type (μ) ou $\alpha R(\theta)$, où $\mu = \lambda \nu \neq 0$ et $\alpha = \lambda r > 0$ (car $\lambda, r > 0$ et $\nu \neq 0$).

- En concaténant les bases orthonormales \mathcal{B}_λ de chaque sous-espace propre $\text{Ker}(S - \lambda I_n)$ de s , on obtient ainsi une base orthonormale \mathcal{B} de E_n (car les sous-espaces propres de s sont deux à deux orthogonaux) dans laquelle la matrice B' de b est $\text{Diag}((\lambda T'_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(s)})$, donc est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu \neq 0$, $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, puisque c'est le cas des matrices $\lambda T'_\lambda$.

Enfin, les éventuels blocs diagonaux de type (μ) avec $\mu < 0$ dans B' correspondent aux valeurs propres négatives de b , et apparaissent donc un nombre pair de fois par hypothèse sur B . Quitte à réordonner la base \mathcal{B} , on peut supposer que ces blocs sont consécutifs dans B' , ce qui permet de les regrouper deux par deux en des blocs de type $\mu I_2 = -\mu R(\pi)$, où $-\mu > 0$.

Donc B est bien ORTS à une matrice B' diagonale par blocs avec des blocs de type (μ) ou $\alpha R(\beta)$, où $\mu, \alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On a ainsi montré que $B \in \mathcal{G}_n$. D'où l'inclusion $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{G}_n$.

- On a donc bien, par double inclusion, $\mathcal{F}_n = \mathcal{G}_n$.

22. Vu la question 21, il s'agit de voir si $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{F}_n$.

Or par définition, B est une matrice orthogonale (car ses colonnes forment une base orthonormale de E_n), de déterminant $(-1)^{n+1}$ et de polynôme caractéristique $\chi_B(X) = \det(XI_n - B) = X^n - 1$ (en développant ces deux déterminants par rapport à la première colonne, le second redonnant le premier en l'évaluant en 0), d'où la discussion suivante :

- Si n est pair, alors B admet -1 comme valeur propre de multiplicité 1, impaire, donc $B \notin \mathcal{F}_n$.
- Si n est impair, alors B n'admet pas de valeur propre négative et appartient à \mathcal{SO}_n , donc $B \in \mathcal{F}_n$ (avec la décomposition évidente $B = ST = TS$ où $S = I_n$ et $T = B$).