A2017 – MATH II PSI

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique (ex Télécom Bretagne),
ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supelec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2017

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Endomorphismes échangeurs

Durée prévue : 3 h

Dans tout le problème, les espaces vectoriels considérés ont $\mathbf{C}$, le corps des nombres complexes, pour corps de base.

Étant donné deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes, p colonnes et à coefficients dans $\mathbf{C}$ (et $0_{n,p}$ sa matrice nulle) et $\mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ celui des matrices carrées à n lignes et à coefficients dans $\mathbf{C}$ (et 0_n sa matrice nulle).

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G \quad \text{et} \quad u(G) \subset F.$$

Étant donné deux endomorphismes u et v de E, on dit que v est **semblable** à u lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $v = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$. On notera que dans ce cas $u = \varphi^{-1} \circ v \circ (\varphi^{-1})^{-1}$, si bien que u est semblable à v.

On dit que u est **de carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$. Une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbf{C})$ est dite **de carré nul** lorsque $A^2 = 0_n$.

L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme u d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

(C1) L'endomorphisme u est échangeur.

(C2) Il existe $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $u = a + b$.

(C3) Les endomorphismes u et $-u$ sont semblables.

Chacune des parties **A** et **B** est indépendante des autres. Les résultats de la partie **D** sont essentiels au traitement des parties **E** et **F**.

A Quelques considérations en dimension 2

On se donne ici un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension 2 et un endomorphisme u de E.

1. Montrer que si u vérifie la condition **(C3)** alors u est de trace nulle.

Jusqu'à la fin de cette partie, on suppose u de trace nulle et de déterminant non nul.

On choisit un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = -\det u$.

2. Montrer que $u^2 = \delta^2\ \mathrm{I}_E$, déterminer le spectre de u et préciser la dimension des sous-espaces propres de u.

3. Expliciter, à l'aide de vecteurs propres de u, une droite vectorielle D telle que $u(D) \not\subset D$, et en déduire que u est échangeur.

B La condition (C1) implique (C2) et (C3)

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathrm{M}_{p,n}(\mathbf{C})$ et $B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbf{C})$. On considère dans $\mathrm{M}_{n+p}(\mathbf{C})$ la matrice

$$M := \begin{bmatrix} 0_n & B \\ A & 0_p \end{bmatrix}.$$

4. Calculer le carré de la matrice $\begin{bmatrix} 0_n & B \\ 0_{p,n} & 0_p \end{bmatrix}$ de $\mathrm{M}_{n+p}(\mathbf{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.

5. On considère dans $\mathrm{M}_{n+p}(\mathbf{C})$ la matrice diagonale par blocs

$$D := \begin{bmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & -I_p \end{bmatrix}.$$

   Montrer que D est inversible, calculer D^{-1} puis DMD^{-1}, et en déduire que M est semblable à $-M$.

Jusqu'à la fin de cette partie, on se donne un endomorphisme u d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u est échangeur, et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

6. On suppose ici F et G tous deux non nuls.
   On se donne une base $(f_1, \dots, f_n)$ de F et une base $(g_1, \dots, g_p)$ de G. La famille $\mathbf{B} = (f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est donc une base de E.
   Compte tenu des hypothèses, décrire la forme de la matrice de u dans $\mathbf{B}$.

7. Déduire des questions précédentes que u vérifie les conditions **(C2)** et **(C3)**.
   On n'oubliera pas de considérer le cas où l'un des sous-espaces vectoriels F et G est nul.

C La condition (C2) implique la condition (C1) : cas d'un automorphisme

Dans cette partie, u désigne un *automorphisme* d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0.$$

8. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Comparer $\operatorname{Ker} f$ à $\operatorname{Im} f$ et en déduire
$$\dim \operatorname{Ker} f \geq \frac{\dim E}{2} \cdot$$

9. Démontrer que $E = \operatorname{Ker} a \oplus \operatorname{Ker} b$, et que $\operatorname{Ker} a = \operatorname{Im} a$ et $\operatorname{Ker} b = \operatorname{Im} b$.

10. En déduire que u est échangeur.

D Intermède : un principe de décomposition

On se donne dans cette partie un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, ainsi qu'un endomorphisme f de E. On se donne un nombre complexe λ arbitraire. On pose $v := f - \lambda\, \mathrm{I}_E$.

11. Montrer que la suite $\left(\operatorname{Ker}(v^k)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

12. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que

$$\forall k \geq p,\ \operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^p.$$

    On pourra introduire la plus grande dimension possible pour un sous-espace vectoriel de la forme $\operatorname{Ker} v^k$ *pour* k *dans* $\mathbf{N}$.
    Montrer qu'alors

$$\operatorname{Ker} v^p = \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker} v^k$$

    et que p peut être choisi parmi les entiers pairs.

Dans la suite de cette partie, on fixe un entier naturel pair p donné par la question **12** et l'on pose

$$E^c_\lambda(f) := \bigcup_{k\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^p.$$

On notera que $E^c_\lambda(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

13. Montrer que $E^c_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(v^{2p})$ et en déduire

$$E = E^c_\lambda(f) \oplus \operatorname{Im}(v^p).$$

    Montrer en outre que les sous-espaces vectoriels $E^c_\lambda(f)$ et $\operatorname{Im}(v^p)$ sont tous deux stables par f.

14. Montrer que λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im}(v^p)$. Montrer que si $E^c_\lambda(f)$ n'est pas nul alors λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $E^c_\lambda(f)$.

15. On se donne ici un nombre complexe μ différent de λ. On suppose que toute valeur propre de f différente de λ est égale à μ.
    Montrer que $\operatorname{Im}(v^p) \subset E^c_\mu(f)$, puis que $E = E^c_\lambda(f) \oplus E^c_\mu(f)$.
    On pourra s'intéresser au polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par f *sur* $\operatorname{Im}(v^p)$.

E La condition (C2) implique la condition (C1) : cas non bijectif

Dans cette partie, on admet la validité de l'énoncé suivant :

Théorème : Tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est échangeur.

On se donne ici un endomorphisme non bijectif u d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe deux endomorphismes a et b de E tels que

$$u = a + b \quad \text{et} \quad a^2 = b^2 = 0.$$

16. Montrer que a et b commutent avec u^2.

On fixe maintenant un entier pair p tel que $E_0^c(u) = \operatorname{Ker} u^p$, donné par la question **12**.

17. Montrer que le sous-espace vectoriel $G := \operatorname{Im} u^p$ est stable par a et b et que les endomorphismes induits a_G et b_G sont de carré nul.

18. En déduire que u est échangeur. *On pourra utiliser, entre autres, le résultat final de la partie* **C**.

F La condition (C3) implique la condition (C1)

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle. Un endomorphisme u de E est dit **indécomposable** lorsque :
(i) La condition **(C3)** est vérifiée par u.
(ii) Il n'existe aucune décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels non nuls, stables par u et tels que les endomorphismes induits respectifs u_F et u_G vérifient tous deux la condition **(C3)**.

Jusqu'à la question **21** incluse, on se donne un endomorphisme indécomposable u de E. On dispose en particulier d'un automorphisme φ de E tel que

$$-u = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}.$$

19. Montrer que φ^2 commute avec u.

20. Montrer que φ^2 possède une unique valeur propre λ. En déduire que les valeurs propres de φ sont parmi α et $-\alpha$, pour un certain nombre complexe non nul α.
On utilisera l'indécomposabilité de u ainsi que les résultats des questions **13** *et* **14**.

21. En déduire que u est échangeur.
On pourra appliquer le résultat final de la question **15**.

22. En déduire plus généralement que, pour tout endomorphisme d'un **C**-espace vectoriel de dimension finie, la condition (**C3**) implique la condition (**C1**).

FIN DU PROBLÈME