Mines 2016 - Math1 PSI
Un corrigé

Préliminaire

1. Le cours nous apprend que pour tout réel α, on a

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

En choisissant $\alpha = -1/2$ et en substituant $-x$ à x, on a donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \quad \text{avec} \quad a_1 = \frac{1}{2},\ \forall k \geq 1\ :\ a_{k+1} = -\frac{-\frac{1}{2}-k}{k+1} a_k = \frac{2k+1}{2(k+1)} a_k$$

On montre par récurrence que

$$\forall k \geq 1,\ a_k = \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$$

- Initialisation : c'est vrai pour $k = 1$ car $\frac{\binom{2}{1}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
- Hérédité : supposons le résultat vrai pour un rang $k \geq 1$. On a alors

$$a_{k+1} = \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \frac{2k+1}{2(k+1)} = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \frac{2k+1}{2(k+1)} = \frac{(2k+2)!}{4^k (k!)^2} \frac{1}{4(k+1)^2} = \frac{(2(k+1))!}{4^{k+1}((k+1)!)^2}$$

ce qui montre le résultat au rang $k+1$.

La formule étant encore valable au rang $k = 0$ ($a_0 = 1$), on a ainsi

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$$

Identité de Karamata

2. On remarque que pour tout $x \in]-1,1[$ et $p \in \mathbb{N}$, on a $x^p \in]-1,1[$ et

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} &= \sqrt{1-x} f(x^{p+1}) \\
&= \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^{p+1}}} \sqrt{1-x^{p+1}} f(x^{p+1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+x+\dots+x^p}} \sqrt{1-x^{p+1}} f(x^{p+1})
\end{aligned}$$

puisque $a^{p+1} - b^{p+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{p} a^k b^{p-k}$. On en déduit que

$$\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}$$

3. Soit $p \in \mathbb{N}$. $g_p\ :\ t \mapsto \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a des problèmes d'intégrabilité en 0 et $+\infty$.

- Au voisinage de 0, $g_p(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable (fonction de Riemann).
- Au voisinage de $+\infty$, $g_p(t) = o(1/t^2)$ par croissances comparées (car $p+1>0$) et est donc intégrable.

g_p est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et l'intégrale proposée converge donc a fortiori. Le changement de variable $u = (p+1)t$ (licite car $t \mapsto (p+1)t$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ à dérivée ne s'annulant pas) donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{p+1}}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}$$

Avec la question précédente, on a donc immédiatement

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{(p+1)k} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

4. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Il existe un entier d et des scalaires $c_0, \dots, c_d$ tels que $Q = \sum_{i=0}^d c_i X^i$. La question précédente donne

$$\forall i \in [|0,d|],\ \lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k c_i (x^k)^i x^k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} c_i (e^{-t})^i}{\sqrt{t}}\,dt$$

En sommant ces relations (linéarité du passage à la limite et du passage à l'intégrale, pas de souci pour intervertir les symboles car on effectue une somme FINIE) on obtient que

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k Q(x^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}Q(e^{-t})}{\sqrt{t}}\,dt$$

5. La fonction $g\ :\ t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$ (il y a un unique problème de continuité en 1 où la fonction a une limite finie à droite et gauche) et on a des problèmes d'intégrabilité en 0 et $+\infty$.
h étant majorée en module par e, $|g(t)| \le \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ et h est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (le majorant l'est).
Par définition de h

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_0^1 = 2$$

6. Pour $x \in [0,1[$ fixé, on a x^k qui tend vers 0 quand $k \to +\infty$. La suite $(a_k x^k h(x^k))$ est ainsi nulle à partir d'un certain rang. La série associé est donc convergente (les sommes partielles stationnent à partir d'un certain rang).

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de h, on a

$$\sqrt{1-e^{-1/n}}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-k/n} h(e^{-k/n}) = \sqrt{1-e^{-1/n}}\sum_{k=0}^{n} a_k$$

Quand $n \to +\infty$, $e^{-1/n} \to 1^-$ et l'égalité de Karamata donne

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1-e^{-1/n}}\sum_{k=0}^{n} a_k = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t})\,dt = 2$$

Comme $1-e^{-x} \sim_0 x$, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \sim \frac{2}{\sqrt{1-e^{-1/n}}} \sim 2\sqrt{n}$$

Théorème taubérien

8. Comme $n \geq [\alpha n]$, on a
$$S_n - S_{[\alpha n]} = \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_k \geq (n - [\alpha n])a_n$$
l'inégalité provenant de la décroissance de (a_k). Si $n - [\alpha n]$ est non nul, c'est une quantité > 0 et on peut diviser pour obtenir
$$a_n \leq \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}$$
De même, comme $[\beta n] \geq n$, on a
$$S_{[\beta n]} - S_n = \sum_{k=n+1}^{[\beta n]} a_k \leq ([\beta n] - n)a_{n+1} \leq ([\beta n] - n)a_n$$
et quand $[\beta n] - n > 0$,
$$\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n$$

9. Comme $[x] \leq x \leq [x] + 1$, on a $[\gamma n] \leq \gamma n \leq [\gamma n] + 1$. Pour $\gamma > 0$, $[\gamma n] > 0$ pour n assez grand (et tend vers $+\infty$) et on peut diviser par $[\gamma n]$ pour en déduire
$$1 \leq \gamma \frac{n}{[\gamma n]} \leq 1 + \frac{1}{[\gamma n]}$$
Par théorème d'encadrement (et comme $[\gamma n] \to +\infty$) on a donc
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{[\gamma n]} = \frac{1}{\gamma}$$
Comme $[\gamma n] \to +\infty$, l'hypothèse fait sur la suite (S_n) indique que
$$\frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \sim 2\sqrt{\frac{[\gamma n]}{n}}$$
et ainsi
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\gamma}$$

10. Pour $\gamma > 0$ différent de 1, on écrit que
$$\sqrt{n}\frac{S_n - S_{[\gamma n]}}{n - [\gamma n]} = \frac{1}{1 - \frac{[\gamma n]}{n}} \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} - \frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \right)$$
et les questions précédentes montre que cette quantité tend vers $\frac{2(1-\sqrt{\gamma})}{1-\gamma}$.
L'encadrement de la question 8 montre que $\sqrt{n}a_n$ est majoré par un terme de limite $\frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha}$ et minoré par un terme de limite $\frac{2(1-\sqrt{\beta})}{1-\beta}$. Par définition des limites,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0/\ \forall n \geq n_0,\ \frac{2(1-\sqrt{\beta})}{1-\beta} - \varepsilon \leq \sqrt{n}a_n \leq \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} + \varepsilon$$

11. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{2(1-\sqrt{x})}{1-x} = \frac{2}{1+\sqrt{x}}$ est de limite 1 en 1, il existe $\alpha < 1 < \beta$ tels que

$$1 - \varepsilon \leq \frac{2(1-\sqrt{\beta})}{1-\beta} \quad \text{et} \quad \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} \leq 1 + \varepsilon$$

Pour ces α et β, la question précédente donne un rang n_0 et

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{2(1-\sqrt{\beta})}{1-\beta} - 2\varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq \frac{2(1-\sqrt{\alpha})}{1-\alpha} + 2\varepsilon$$

Par définition, des limites, on a donc $\sqrt{n} a_n \to 1$ et donc

$$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Marche aléatoire

12. Par indépendance des X_i, on a

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \ldots, X_n = i_{n-k}) = \prod_{j=k+1}^{n} \mathbb{P}(X_j = i_{j-k})$$

Comme les X_i ont toutes la même loi, $\mathbb{P}(X_j = i_{j-k}) = \mathbb{P}(X_{j-k} = j - k)$ et donc (en utilisant encore l'indépendance)

$$\mathbb{P}(X_{k+1} = i_1, \ldots, X_n = i_{n-k}) = \prod_{j=1}^{n-k} \mathbb{P}(X_j = i_j) = \mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_{n-k} = i_{n-k})$$

13. Par définition des S_n, on a

$$\begin{cases} S_{k+1} - S_k = j_1 \\ S_{k+2} - S_k = j_2 \\ \vdots \\ S_n - S_k = j_{n-k} \end{cases} \iff \begin{cases} X_{k+1} = j_1 \\ X_{k+1} + X_{k+2} = j_2 \\ \vdots \\ X_{k+1} + \cdots + X_n = j_{n-k} \end{cases} \iff \begin{cases} X_{k+1} = j_1 \\ X_{k+2} = j_2 - j_1 \\ \vdots \\ X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1} \end{cases}$$

On peut alors utiliser la question précédente pour en déduire que

$$\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(X_1 = j_1, X_2 = j_2 - j_1, \ldots, X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1})$$

On fait alors le trajt dans l'autre sens et on remarque que

$$\begin{cases} X_1 = j_1 \\ X_2 = j_2 - j_1 \\ \vdots \\ X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1} \end{cases} \iff \begin{cases} S_1 = j_1 \\ S_2 = j_2 \\ \vdots \\ S_{n-k} = j_{n-k} \end{cases}$$

ce qui donne finalement

$$\mathbb{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}) = \mathbb{P}(S_1 = j_1, \ldots, S_{n-k} = j_{n-k})$$

14. On remarque que $A_k^n = (S_k = 0) \cap (S_{k+1} \neq 0) \cap \ldots (S_n \neq 0)$ et donc

$$\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}_{S_k=0}(S_{k+1} \neq 0, \ldots, S_n \neq 0)$$

De façon évidente,

$$\mathbb{P}_{S_k=0}(S_{k+1}\neq 0,\dots,S_n\neq 0)=\mathbb{P}_{S_k=0}(S_{k+1}-S_k\neq 0,\dots,S_n-S_k\neq 0)$$

On remarque que les variables $S_{k+1}-S_k$, $\dots$, S_n-S_k ne dépendent que de $X_{k+1},\dots,X_n$ et sont donc indépendantes de S_k qui ne dépend que de $X_1,\dots,X_k$ (et puisque les X_i sont, elles, indépendantes). On a donc en fait

$$\mathbb{P}_{S_k=0}(S_{k+1}\neq 0,\dots,S_n\neq 0)=\mathbb{P}(S_{k+1}-S_k\neq 0,\dots,S_n-S_k\neq 0)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_{k+1}-S_k\neq 0,\dots,S_n-S_k\neq 0) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j_1,\dots,j_{n-k}\neq 0}(S_{k+1}-S_k=j_1,\dots,S_n-S_k=j_{n-k})\right)\\ &= \sum_{j_1,\dots,j_{n-k}\neq 0}\mathbb{P}\left(S_{k+1}-S_k=j_1,\dots,S_n-S_k=j_{n-k}\right)\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de l'incompatiblité des événements. La question précédente donne alors

$$\mathbb{P}(S_{k+1}-S_k\neq 0,\dots,S_n-S_k\neq 0)=\sum_{j_1,\dots,j_{n-k}\neq 0}\mathbb{P}\left(S_1=j_1,\dots,S_{n-k}=j_{n-k}\right)$$

et en refaisant le chemin dans l'autre sens

$$\mathbb{P}(S_{k+1}-S_k\neq 0,\dots,S_n-S_k\neq 0)=\mathbb{P}(S_1\neq 0,\dots,S_{n-k}\neq 0))=\mathbb{P}(E_{n-k})$$

Finalement, on trouve que

$$\mathbb{P}(A_k^n)=\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k})$$

15. Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $\omega\in\Omega$; comme $S_0(\omega)=0$, il existe un plus grand $k\in[|0,n|]$ tel que $S_k(\omega)=0$ et on a alors $\omega\in A_k^n$. La réunion des parties $A_0^n,\dots,A_n^n$ est donc égale à Ω. Ces parties étant disjointes, on a donc

$$1=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(A_k^n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k})$$

16. $\sum(\mathbb{P}(S_n=0)x^n)$ et $\sum(\mathbb{P}(E_n)x^n)$ étant des séries entières de rayon de convergence au moins égal à 1 ($|\mathbb{P}(E_n)x^n|\leq 1$ si $|x|\leq 1$). On peut donc utiliser le théorème sur le produit de Cauchy et écrire que pour $x\in]-1,1[$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(S_n=0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nx^n\quad\text{avec}\quad u_n=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k})$$

Avec la question précédente, on a donc

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(S_n=0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

17. $S_n(\omega)$ est la somme de n quantités valant 1 ou -1 et ne peut donc être nul que s'il y a autant de 1 que de -1, c'est à dire que si n est pair. On a donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{2n+1}=0)=0$$

Supposons maintenant n pair et écrivons que $n = 2p$. La valeur de $S_n(\omega)$ ne dépend que des valeurs de $\omega_1, \dots, \omega_{2p}$. Il y a $2^{2p} = 4^p$ choix pour ces valeurs et on a

$$\mathbb{P}(S_{2p} = 0) = \frac{\alpha_p}{4^p}$$

où α_p est le nombre de uplets $(\omega_1, \dots, \omega_{2p})$ contenant autant de 1 que de -1. Choisir un tel uplet, c'est choisir la position des 1 et il y a $\binom{2p}{p}$ tels choix. On a donc

$$\mathbb{P}(S_{2p} = 0) = \frac{\binom{2p}{p}}{4^p}$$

18. On en déduit que pour $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\binom{2p}{p}}{4^p} x^{2p} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) x^n = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x} = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

19. Considérons la fonction f définie par

$$\forall x \in]-1, 1[, \ f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$$

Comme $\sqrt{1 - x} f(x) \to \sqrt{\pi}$ quand $x \to 1^-$, on peut utiliser la partie B (et la question précédente) pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{P}(E_n) \sim 2\sqrt{n}$$

Par ailleurs $\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(E_n)$ est le terme général d'une suite décroissante ($(T > n) \subset (T > n - 1)$) et le théorème taubérien indique que

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathbb{P}(E_n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(E_n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

20. On a

$$(T = +\infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (T > n) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

Par continuité décroissante des probabilités (appliqué avec la suite décroissante d'ensemble de terme général $E_0 \cap \dots \cap E_n = E_n$), on en déduit que

$$\mathbb{P}(T = \infty) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(E_n) = 0$$

21. On a $(T = n) = (T > n-1) \setminus (T > n)$ et comme $(T > n) \subset (T > n-1)$, on a $\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n)$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T = k)x^k &= \sum_{k=0}^{n} (\mathbb{P}(T > k-1) - \mathbb{P}(T > k))x^k \\
&= \mathbb{P}(T > -1) + x\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T > k-1)x^{k-1} - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(T > k)x^k \\
&= 1 + x\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(E_k)x^k - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(E_k)x^k
\end{aligned}$$

Pour $x \in]-1,1[$, les termes du membre de droite admettent une limite quand $n \to +\infty$ et, avec l'expression des sommes,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T = k)x^k = 1 + (x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

La relation reste vraie pour $x = 0$ car $(T = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (et se lit $1 = 1$).

22. On commence par chercher le DSE de $h \ : \ x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$. Pour cela on remarque que (pour $x \in]-1,1[$)

$$h'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^{2k+1}$$

Par théorème de primitivation des séries entières,

$$h(x) = h(0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k(2k+2)} x^{2k+2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\binom{2(j-1)}{j-1}}{4^{j-1}.2j} x^{2j}$$

Par unicité des DSE, on en déduit que

$$\mathbb{P}(T = 2j) = \frac{\binom{2(j-1)}{j-1}}{4^{j-1}.2j}$$

Il nous reste à remarquer que

$$\binom{2(j-1)}{j-1} = \frac{(2j-2)!}{((j-1)!)^2} = \frac{(2j)!}{(j!)^2}\frac{j^2}{2j(2j-1)}$$

pour en déduire que

$$\mathbb{P}(T = 2j) = \frac{\binom{2j}{j}}{4^j(2j-1)}$$