Mines 2015 - Maths 2

1 Le groupe symplectique

1. Un calcul par bloc donne immédiatement
$$J^2 = -I_{2n}$$
ce qui prouve que J est inversible avec
$$J^{-1} = -J$$
Par ailleurs, J est antisymétrique, c'est à dire
$$J^T = -J$$
Finalement, on a aussi
$$J^{-1} = J^T$$
2. On a alors
$$J^T JJ = J^{-1}JJ = J$$
ce qui montre que $J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. Un calcul par blocs donne
$$K(\alpha)^T JK(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & -\alpha I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n = J \end{pmatrix}$$
ce qui justifie que $K(\alpha) \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.
3. Un calcul par blocs donne (les opérations de transposition et de passage à l'inverse commutent)
$$L_U^T JL_U = \begin{pmatrix} U^T & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_n & -(U^T)^{-1} \\ U & 0_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} = J$$
ce qui montre que $L_U \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.
4. On suppose $M^T JM = J$. En passant au déterminant, on obtient (le déterminant est un morphisme multiplicatif invariant par transposition)
$$\det(M)^2 \det(J) = \det(J)$$
Comme J est inversible, $\det(J)$ est non nul et donc
$$\det(M) \in \{1, -1\}$$
5. Soient $M, N \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. On a
$$(MN)^T J(MN) = N^T M^T JMJ = N^T JN = J$$
ce qui prouve que $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ est stable par produit.
6. Un élément de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ a un déterminant non nul (de valeur ± 1) et est donc inversible. Si $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, on a $M^T JM = J$. Multiplions par M^{-1} à gauche et par $(M^T)^{-1}$ à droite ; on a alors
$$J = (M^T)^{-1} JM^{-1} = (M^{-1})^T JM^{-1}$$
et donc $M^{-1} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

7. Soit $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$. On a $M^{-1} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ et donc $(M^{-1})^T J M^{-1} = J$. En transposant, et comme $J^T = J^{-1}$, cela donne
$$(M^T)^{-1} J^{-1} M^{-1} = J^{-1}$$
et en passant à l'inverse
$$MJM^T = J$$
ce qui signifie que $M^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$.

8. Un produit par blocs donne
$$M^T JM = \begin{pmatrix} -A^T C + C^T A & -A^T D + C^T B \\ -B^T C + D^T A & -B^T D + D^T B \end{pmatrix}$$
et $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ si et seulement si
$$-A^T C + C^T A = -B^T D + D^T B = 0_n \ \text{ et } \ A^T D - C^T B = -B^T C + D^T A = I_n$$

2 Centre de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$

9. I_{2n} et $-I_{2n}$ sont des éléments de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ (calcul immédiat) et elles commutent avec toute matrice donc, en particulier, avec toutes celles de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$. Ainsi
$$\{I_{2n}, -I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$$

10. Comme $M \in \mathcal{Z}$, M commute avec $L = K(-1)^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ (questions **2** et **7**). Un calcul par blocs donne alors
$$\begin{pmatrix} A & A+B \\ C & C+D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+C & B+D \\ C & D \end{pmatrix}$$
et ainsi $C = 0$ et $A = D$. Compte-tenu de ces relations, $L^T M = ML^T$ (qui a lieu puisque $L^T = K(-1) \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$), donne
$$\begin{pmatrix} A+B & B \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ A & A+B \end{pmatrix}$$
et ainsi $B = 0$. Enfin, comme $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$, les relations de la question **8** donnent $AA^T = I_n$ c'est à dire $A \in \mathcal{O}_n \subset \mathcal{G}_n$. On a montré que
$$B = C = 0_n, \ D = A, \ A \in \mathcal{O}_n \subset \mathcal{G}_n$$

11. Soit $U \in \mathcal{G}_n$. On utiilise maintenant le fait que L_U commute avec M, ce qui donne (compte tenu des relations de la question précédente)
$$\begin{pmatrix} AU & 0_n \\ 0_n & A(U^{-1})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UA & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T A \end{pmatrix}$$
et en particulier $AU = UA$.

12. Les matrices $I_n + E_{i,j}$ sont toutes inversibles (déterminant 1 si $i \neq j$ et 2 si $i = j$) et commutent donc avec A. Ainsi $AE_{i,j} = E_{i,j}A$.
Remarquons que
$$(AE_{i,j})_{u,v} = \begin{cases} 0 & \text{si } v \neq j \\ a_{u,i} & \text{si } v = j \end{cases} \quad \text{ et } \quad (E_{i,j}A)_{u,v} = \begin{cases} 0 & \text{si } u \neq i \\ a_{j,v} & \text{si } u = i \end{cases}$$
Supposons que $i \neq j$; en égalant les coefficients d'indices (i,j) de $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$, on obtient que $a_{i,i} = a_{j,j}$.

Pour tout i, en égalant les coefficients d'indices (i,j) de $AE_{i,i}$ et $E_{i,i}A$, on obtient, pour $j \neq i$, $a_{i,j} = 0$.
La matrice A est donc du type αI_n. Comme $\det(A)^2 = \det(M) = \pm 1$, on a $\alpha^{2n} = \pm 1$ et donc $\alpha = \pm 1$. On a donc $A = \pm I_n$ et $M = \pm I_{2n}$. Ceci montre l'inclusion réciproque de la question **9** et donc que

$$\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$$

3 Déterminant d'une matrice symplectique

13. Un calcul par blocs montre que les matrices Q, U, V, W conviennent si et seulement si

$$U + QV = A,\ QW = B,\ V = C,\ W = D$$

Il suffit donc de poser

$$V = C,\ W = D,\ Q = BD^{-1},\ U = A - BD^{-1}C$$

14. D'après la question **8**, $D^T B = B^T D$ et donc $BD^{-1} = (D^{-1})^T B^T = (BD^{-1})^T$, c'est à dire que BD^{-1} est symétrique. Avec la question **13** (et comme le déterminant est un morphisme multiplicatif) on a (avec la formule rappelée du déterminant bloc-triangulaire)

$$\det(M) = \det(UW) = \det(U)\det(W) = \det(A - BD^{-1}C)\det(D)$$

Le déterminant étant invariant par similitude,

$$\det(A - BD^{-1}C) = \det(A^T - C^T(BD^{-1})^T)$$

et comme BD^{-1} est symétrique,

$$\det(A - BD^{-1}C) = \det(A^T - C^T BD^{-1})$$

Il reste à multiplier par $\det(D)$ et à utiliser encore les propriétés de morphisme du déterminant pour conclure que

$$\det(M) = \det(A^T D - C^T B)$$

Les formules de la question **8** donnent $A^T D - C^T B = I_n$ et ainsi

$$\det(M) = 1$$

15. On remarque que $QV_1 = s_1 PV_1$ et $QV_2 = s_2 PV_2$. On a alors

$$(QV_1|QV_2) = (QV_1)^T QV_2 = s_1 V_1^T P^T QV_2$$

mais aussi

$$(QV_1|QV_2) = (QV_1)^T QV2 = s_2 V_1^T Q^T PV_2$$

Comme $P^T Q$ est symétrique elle est égale à sa transposée $Q^T P$ et on a donc

$$s_2(QV_1|QV_2) = s_1(QV_1|QV_2)$$

L'hypothèse $s_1 \neq s_2$ permet de conclure que $(QV_1|QV_2) = 0$.

16. Soit $X \in \ker(B) \cap \ker(D)$. On a alors

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme M est inversible, on en déduit que $X = 0$ et ainsi

$$\ker(B) \cap \ker(D) = \{0\}$$

17. Si (par l'absurde) on avait $DV_i = 0$ alors on aurait aussi $BV_i = 0$(puisque $s_i \neq 0$) et donc $V_i = 0$ (question précédente) ce qui est exclus.
D'après la question **8**, $D^T B = B^T D$ et donc $B^T D$ est symétrique. Avec la question **15** (on est dans le cas où l'on suppose D non inversible et on peut uitiliser la question), on a $(DV_i|DV_j) = 0$ quand $i \neq j$. La famille $(DV_1, \ldots, DV_m)$ est donc orthogonale dans $\mathcal{E}_n$. Etant composée de vecteurs non nuls, elle est libre.

18. Si, par l'absurde, $D - \alpha B$ n'était jamais inversible, on pourrait utiliser $n+1$ valeurs distinctes non nulles de α (par exemple $1, 2, \ldots, n+1$) pour obtenir des vecteurs $V_1, \ldots, V_{n+1}$ comme ci-dessus. On aurait alors $n+1$ vecteurs indépendants en dimension n, ce qui est impossible. Il existe donc α réel tel que $D - \alpha B$ inversible (et on peut même choisir α dans $\{1, \ldots, n+1\}$).

19. M et $K(\alpha)$ étant dans $\mathcal{S}_{p_{2n}}$, la matrice

$$N = K(\alpha)M = \begin{pmatrix} A & B \\ -\alpha A + C & -\alpha B + D \end{pmatrix}$$

l'est aussi. Comme $D - \alpha B$ est inversible, on peut utiliser **14** pour conclure que $\det(N) = 1$. Toujours en utilisant le fait que det un morphisme multiplicatif, on a alors $\det(M) = 1$.