A 2015 MATH. I PC

ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
SUPAÉRO (ISAE), ENSTA PARISTECH,
TÉLÉCOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES DE SAINT-ÉTIENNE, MINES DE NANCY,
TÉLÉCOM BRETAGNE, ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
CONCOURS D'ADMISSION 2015

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Filière PC

(**Durée de l'épreuve : 3 heures**)
L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Sujet mis à la disposition des concours :
Cycle international, ENSTIM, TÉLÉCOM INT, TPE-EIVP

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC.

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

— On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

— On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 :

$$\mathcal{P} = \left\{ P = (p_n,\, n \geq 0) \text{ tel que } \forall n \geq 0, p_n \geq 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \right\}.$$

— Pour P et Q deux éléments de $\mathcal{P}$, on définit

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \sup_{A \subset \mathbf{N}} \left| \sum_{n \in A} p_n - \sum_{n \in A} q_n \right| = \sup_{A \subset \mathbf{N}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n) q_n \right|,$$

où $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On pourra écrire $P(A)$ pour $\sum_{n \in A} p_n$.

— Dans tout ce qui suit, λ est un réel strictement positif fixé et h est un élément de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire une fonction bornée de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

I Préliminaires

1. Trouver le réel c tel que la suite

$$c\, \frac{\lambda^n}{n!},\, n \geq 0,$$

appartienne à $\mathcal{P}$.

2. Soit p et q deux réels de $[0, 1]$. Calculer

$$\operatorname{dist}\Big((1-p, p, 0, \cdots),\ (1-q, q, 0, \cdots) \Big).$$

3. Soit $f \in \mathcal{F}$ et $P \in \mathcal{P}$, montrer que la série de terme général $(f(n)\, p_n,\, n \geq 0)$ est convergente.

II Caractérisation

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)},\, n \in \mathbf{N}) \in \mathcal{P}$ défini par

$$p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

4. Soit $f \in \mathcal{F}$, montrer que la série de terme général $(nf(n)\,p_n^{(\lambda)},\, n \geq 0)$ est convergente.

5. Pour tout $f \in \mathcal{F}$, établir l'identité suivante :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\; p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)\; p_n^{(\lambda)}. \tag{1}$$

Soit $Q = (q_n,\, n \geq 0)$ un élément de $\mathcal{P}$ tel que pour tout $f \in \mathcal{F}$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\; q_n = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)\; q_n.$$

6. En choisissant convenablement des éléments de $\mathcal{F}$, montrer que $Q = P_\lambda$.

III Résolution de l'équation de Stein

On note $\mathcal{S}_h$, l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, telles que, pour tout entier $n \geq 0$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda f(n+1) - nf(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\; p_k^{(\lambda)}. \tag{2}$$

Pour simplifier les notations, on note $\tilde{h}$ la fonction définie pour tout $n \geq 0$ par

$$\tilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\; p_k^{(\lambda)}.$$

7. Montrer que $\mathcal{S}_h$ possède une infinité d'éléments et que pour tout $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{h}(k)\, \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{3}$$

8. Pour $f \in \mathcal{S}_h$, pour tout entier $n \geq 1$, établir l'identité suivante :

$$f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \tilde{h}(k) \frac{\lambda^k}{k!}. \tag{4}$$

9. En déduire que toute fonction $f \in \mathcal{S}_h$ est bornée.

IV Propriété de Lipschitz

Pour une fonction f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, on considère la fonction Δf définie par

$$\begin{aligned} \Delta f \,:\, \mathbf{N} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ n &\longmapsto f(n+1) - f(n). \end{aligned}$$

On veut montrer que pour $f \in \mathcal{S}_h$,

$$\sup_{n \geq 1} |\Delta f(n)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k \in \mathbf{N}} h(k) - \inf_{k \in \mathbf{N}} h(k) \right). \tag{5}$$

Pour un entier $m \geq 0$, on considère d'abord le cas particulier où $h = \mathbf{1}_{\{m\}}$:

$$h(m) = 1 \text{ et } h(n) = 0 \text{ si } n \neq m.$$

On note f_m l'un des éléments de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_{\{m\}}}$.

10. Établir pour $1 \leq n \leq m$, l'identité suivante :

$$f_m(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n}\, p_m^{(\lambda)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

11. Établir une identité analogue pour $n > m \geq 0$ et en déduire le signe de $f_m(n)$ pour tout $n \geq 1$.

12. Montrer que la fonction Δf_m est négative sur $\mathbf{N} \backslash \{0, m\}$.

    Indication : on distinguera les cas $1 \leq n < m$ *et* $n > m \geq 0$.

13. Établir les identités suivantes :

$$\Delta f_0(0) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}, \ \Delta f_m(m) = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m} \frac{\lambda^k}{k!} \right) \text{ pour } m > 0.$$

14. En déduire que

$$\sup_{n\geq 1} \Delta f_m(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}\cdot$$

On étudie maintenant le cas général. On définit la fonction h_+ par

$$h_+(n) = h(n) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k).$$

15. Montrer que $\mathcal{S}_h = \mathcal{S}_{h_+}$.

16. Montrer que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n)$$

est convergente pour tout entier $n \geq 1$.

17. Montrer que la fonction f définie, pour tout $n \geq 1$, par

$$f(n) = \sum_{m=0}^{\infty} h_+(m) f_m(n),$$

appartient à $\mathcal{S}_h$.

18. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,

$$f(n+1) - f(n) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k) \right).$$

En utilisant $-f$ et $h_- = \sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - h$, on prouverait de façon analogue que pour tout entier $n \geq 1$,

$$-(f(n+1) - f(n)) \leq \frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda} \left(\sup_{k\in\mathbf{N}} h(k) - \inf_{k\in\mathbf{N}} h(k) \right),$$

et qu'ainsi l'inégalité (5) est vraie dans le cas général.

V Application probabiliste

On considère $(X_k,\ k = 1, \cdots, n)$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes. On suppose que pour tout entier $k \in \{1, \cdots, n\}$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $r_k \in]0,\ 1]$:

$$\mathbf{P}(X_k = 1) = r_k = 1 - \mathbf{P}(X_k = 0).$$

On pose $\lambda = \sum_{k=1}^{n} r_k$ ainsi que

$$S = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et pour tout } k \in \{1, \cdots, n\},\ W_k = S - X_k.$$

On identifie la loi de la variable aléatoire S et l'élément $(\mathbf{P}(S = k),\ k \in \mathbf{N})$ de $\mathcal{P}$, l'ensemble défini au début de ce texte.

19. Pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, pour tout $f \in \mathcal{F}$, montrer que

$$X_k f(S) = X_k f(W_k + 1) \text{ et que } \mathbf{E}(f(W_k)X_k) = r_k \mathbf{E}(f(W_k)).$$

20. Soit $h \in \mathcal{F}$ et $f \in \mathcal{S}_h$, établir l'identité suivante.

$$\mathbf{E}\left(\lambda f(S+1) - Sf(S)\right) = \sum_{k=1}^{n} r_k\, \mathbf{E}\Big(X_k(f(W_k+2) - f(W_k+1))\Big).$$

21. Établir que

$$\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S),\ P_\lambda) = \sup_{A \subset \mathbf{N}} \Big| \mathbf{E}\left(\lambda f_A(S+1) - S f_A(S)\right) \Big|,$$

où f_A est un élément de $\mathcal{S}_{\mathbf{1}_A}$.

22. En déduire que

$$\mathrm{dist}(\mathrm{loi}(S),\ P_\lambda) \leq \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} r_k^2.$$

Fin du problème