Mines PSI 2

Racine de l'opposé du Laplacien et équation de la chaleur généralisée

1 Séries trigonométriques.

Q.1. Si $f \in \mathcal{C}^0_\#$ alors

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ |c_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)e_{-n}(\theta)|\ d\theta \leq \|f\|$$

puisque $|e_{-n}(\theta)| = 1$ et $|f(\theta)| \leq \|f\|$. La suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc bornée.

Q.2. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty_\#$. On peut intégrer par parties pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f') = inc_n(f)$$

Une récurrence immédiate montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$$

Avec la question précédente, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ |c_n(f)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|}{|n|^k}$$

et on obtient la relation voulue avec $C_k = 1 + \|f^{(k)}\| > 0$ (le 1 n'est là que pour assurer la stricte positivité).

Q.3. Soit $h_n\ :\ x \mapsto d_n e_n(x)$.

- Les suites $(h_n)_{n\geq 0}$ et $(h_n)_{n>0}$ sont composées de fonctions continues.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\| \leq |d_n|$ et $\sum(h_n)_{n\geq 0}$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$.
- $\forall n < 0,\ \|f_n\| \leq |d_n|$ et $\sum(h_n)_{n<0}$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$.

Par théorème de continuité des séries de fonctions, $\sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ et $\sum_{n<0} h_n$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}$. La 2π-périodicité des h_n entraînant immédiatement celle des sommes partielles puis des sommes (passage à la limite dans une égalité) on a donc

$$h \in \mathcal{C}^0_\#$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$; on a

$$2\pi c_n(h) = \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k e_{n-k}(\theta)\ d\theta$$

Comme $|h_k(\theta)e_{n-k}(\theta)| \leq |d_k|$, on a convergence normale de la série sous l'intégrale sur le SEGMENT $[0, 2\pi]$ ce qui justifie l'interversion somme-intégrale et donne

$$2\pi c_n(h) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(d_k \int_0^{2\pi} e_{n-k}(\theta)\ d\theta \right) = 2\pi d_n$$

On a donc montré que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ d_n = c_n(h)$$

Q.4. On garde les notations de la question précédente.

- On sait déjà que $\sum(h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (il y a en fait deux séries mais nous travaillerons désormais directement avec des suites indicées par $n \in \mathbb{Z}$ en gardant en tête qu'il y a deux limites ou sommes à considérer). La convergence est même normale.

- $\forall n,\ h_n \in \mathcal{C}^\infty$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ h_n^{(k)} = d_n e_n^{(k)} = d_n (in)^k e_n$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall |n| \geq N_k,\ \|h_n^{(k)}\| \leq \frac{C_{k+2}}{n^2}$. $\sum (h_n^{(k)})_{n\geq |N_k|}$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Il en est alors de même de $\sum (h_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (on ne rajoute qu'un nombre fini de termes tous bornés sur $\mathbb{R}$).

Par théorème de régularité des séries de fonctions, on a donc h qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, avec la 2π-périodicité immédiate,

$$h \in \mathcal{C}^\infty_\#$$

Q.5. Soit B une application linéaire de $\mathcal{C}^\infty_\#$ dans lui même. On procède en deux temps.

- Supposons que B soit un opérateur différentiel de $\mathcal{C}^\infty_\#$ dans lui même (avec les notations de l'énoncé) et notons K son ordre (remarquons que K est bien défini si au moins un des b_k est non nul ce que nous supposons ici). Comme la somme est finie, on peut intervertir somme et intégrale par linéarité du passage à l'intégrale pour obtenir $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty_\#$

$$c_n(Bf) = c_n\left(\sum_{k=0}^K b_k f^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^K b_k c_n(f^{(k)})$$

Avec la question **2**, on en déduit que

$$c_n(Bf) = \left(\sum_{k=0}^K b_k i^k n^k\right) c_n(f) = P_K(f) c_n(f) \quad \text{avec} \quad P_K = \sum_{k=0}^K b_k i^k X^k$$

et P_K est un polynôme de degré K ($b_K \neq 0$).

- Réciproquement, supposons que l'on puisse trouver $a_0, \dots, a_K$ avec $a_K \neq 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall f \in \mathcal{C}^\infty_\#,\ c_n(Bf) = \left(\sum_{k=0}^K a_k n^k\right) c_n(f)$$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty_\#$; comme Bf est dans $\mathcal{C}^\infty_\#$, elle est somme de sa série de Fourier (il suffit même qu'elle soit continue et de classe C^1 par morceaux) et ainsi

$$\begin{aligned} Bf = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(Bf) e_n &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\left(\sum_{k=0}^K a_k n^k\right) c_n(f) e_n\right) \\ &= \sum_{k=0}^K \left(a_k \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^k c_n(f) e_n\right) \end{aligned}$$

l'interversion étant licite puisque l'une des sommes est finie et puisque toutes les séries écrites convergent (c'est le cas pour $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^k c_n(f) e_n$ car avec la question **2**, $\|n^k c_n(f) e_n\| \leq \frac{C_{k+2}}{n^2}$). On peut alors écrire que

$$Bf = \sum_{k=0}^K \left(a_k (-i)^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} (in)^k c_n(f) e_n\right) = \sum_{k=0}^K \left(a_k (-i)^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f^{(k)}) e_n\right)$$

Comme $f^{(k)}$ est régulière, elle est aussi somme de sa série de Fourier et on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f^{(k)}) e_n = f^{(k)}$. On en déduit que B est un opérateur différentiel d'ordre K (avec $b_k = a_k(-i)^k$).

2 Equation de la chaleur généralisée.

Q.6. Posons $d_n = \rho(|n|) c_n(f)$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $f \in \mathcal{C}^\infty_\#$, la question **2** s'applique. Soit $k \in \mathbb{N}$; on a

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ |d_n| \leq \rho(|n|) \frac{C_{k+\ell}}{|n|^{k+\ell}} \leq \frac{C_{k+\ell}}{|n|^k}$$

La question **4** indique alors que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme appartient à $\mathcal{C}^\infty_\#$.

Q.7. Soit $t>0$. On pose cette fois $d_n = e^{-t\rho(|n|)}c_n(f)$. On a maintenant

$$\forall n\in\mathbb{Z}^*,\ |d_n| \le e^{-t|n|}|c_n(f)| \le e^{-t|n|}\|f\|$$

Pour $k\in\mathbb{N}$, on sait que $|n|^k e^{-t|n|}$ est de limite nulle quand $|n|\to+\infty$. Il existe donc N_k tel que

$$\forall |n|\ge N_k,\ |d_n| \le \frac{\|f\|}{|n|^k}$$

On conclut alors encore avec la question **4**.

Q.8. Fixons $x\in\mathbb{R}$ et $f\in\mathcal{C}^0_\#$. Notons $g_n\ :\ t\mapsto e^{-t\rho(|n|)}c_n(f)e_n(x)$.

- Les fonctions g_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Pour tout $k\ge 1$, $g_n^{(k)} = (-\rho(|n|))^k g_n$.
- $\sum(g_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ (sa somme est $t\mapsto Q_t(f)(x)$).
- Pour tout $k\ge 1$, on a

$$\forall a>0,\ \forall t\in[a,+\infty[,\ |g_n^{(k)}(t)| \le |n|^{k\ell}e^{-a|n|}$$

  Le majorant est indépendant de t et $\sum(|n|^{k\ell}e^{-a|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ converge ($o(1/|n|^2)$ aux voisinages des infinis par croissances comparées). Les séries dérivées $\sum(g_n^{(k)})_{n\in\mathbb{Z}}$ sont donc normalement convergentes sur tout ensemble du type $[a,+\infty[$ et donc a fortiori sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

Le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions indique que $t\mapsto Q_t(f)(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q.9. Le théorème utilisé permet de dériver terme à terme :

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_t(f)(x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho(|n|)e^{-t\rho(|n|)}c_n(f)e_n(x)$$

Par ailleurs, $Q_t(f)\in\mathcal{C}^\infty_\#$ et on a

$$A(Q_t(f))(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho(|n|)c_n(Q_t(f))e_n(x)$$

Dans la relation (4), la série converge normalement et la question **3** donne

$$c_n(Q_t(f)) = e^{-t\rho(|n|)}c_n(f)$$

On en déduit finalement que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{\partial}{\partial t}Q_t(f)(x) = -A(Q_t(f))(x)$$

Q.10. Soit $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et soit $g\in\mathcal{C}^\infty_\#$. Raisonnons par conditions nécessaires puis suffisantes pour montrer l'existence et l'unicité du u cherché.

- Supposons que u convienne. On a alors, en écrivant que u est somme de sa série de Fourier,

$$g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\rho(|n|)+\alpha)c_n(u)e_n$$

  Comme $\sum((\rho(|n|)+\alpha)c_n(u))_{n\in\ \mathbb{Z}}$ converge normalement (question **6** et convergence normale de la série de Fourier de u), la question **3** indique que

$$\forall n\in\mathbb{Z},\ (\rho(|n|)+\alpha)c_n(u) = c_n(g)$$

Comme $-\alpha \notin \mathbb{R}^+$, $(\rho(|n|)+\alpha) \neq 0$ et ainsi

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(u) = \frac{c_n(g)}{\rho(|n|)+\alpha}$$

et donc

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n(g)}{\rho(|n|)+\alpha} e_n$$

- Réciproquement, on remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$n^k \left|\frac{c_n(g)}{\rho(|n|)+\alpha}\right| \underset{|n|\to\infty}{\sim} \frac{n^k |c_n(g)|}{\rho(|n|)}$$

l'équivalent étant correct car $\rho(|n|)$ est de limite infinie (et le quotient existant car $\alpha \notin \mathbb{R}^-$). Cette quantité est de limite nulle quand $|n| \to +\infty$ car $\frac{n^k|c_n(g)|}{\rho(|n|)} \le n^{k-1}|c_n(g)|$ qui tend vers 0 avec la question **2**. Elle finit donc par être plus petite que 1 :

$$\exists N_k /\ \forall |n| \ge N_k,\ \left|\frac{c_n(g)}{\rho(|n|)+\alpha}\right| \le \frac{1}{|n|^k}$$

La question **4** indique alors que

$$u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n(g)}{\rho(|n|)+\alpha} e_n$$

est dans $\mathcal{C}^\infty_\#$. Le même calcul que dans les conditions nécessaires montre que g et $(A+\alpha I)(u)$ ont les mêmes coefficients de Fourier. Les fonctions sont donc égales (puisqu'égales à la somme de leurs séries de Fourier puisque régulières).

Il existe ainsi une unique fonction u convenable et

$$u = (A+\alpha I)^{-1}(g) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{c_n(g)}{\rho(|n|)+\alpha} e_n$$

Q.11. Supposons $Re(\alpha) > 0$ et $g \in \mathcal{C}^\infty_\#$. On a, $x \in \mathbb{R}$ étant fixé,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} Q_t(g)(x)\, dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\alpha t} e^{-t\rho(|n|)} c_n(g) e_n(x)\, dt$$

Posons $g_n\ : t \mapsto e^{-\alpha t} e^{-t\rho(|n|)} c_n(g) e_n(x)$.

- Les g_n sont des fonctions continues. $\sum (g_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa somme $t \mapsto Q_t(g)(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (question **8**).
- Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$|g_n(t)| \le e^{-Re(\alpha)t} |c_n(g)|$$

Comme $Re(\alpha) > 0$, g_n est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\int_0^{+\infty} |g_n(t)|\, dt \le \frac{|c_n(g)|}{Re(\alpha)}$$

$\sum (|c_n(g)|)_{n\in\mathbb{Z}}$ étant convergente, il en est de même de $\left(\int_0^{+\infty} |g_n(t)|\, dt\right)_{n\in\mathbb{Z}}$.

On peut appliquer le théorème d'interversion somme-intégrale (notons à nouveau qu'en fait on devrait découper en deux sommes et appliquer deux fois le théorème) pour obtenir

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} Q_t(g)(x)\, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} e^{-t\rho(|n|)}\, dt \right) c_n(g) e_n(x)$$

En calculant l'intégrale, on reconnaît l'expression de la question précédente et ainsi

$$(A+\alpha I)^{-1}(g)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} Q_t(g)(x)\, dt$$

Q.12. Raisonnons encore par conditions nécessaires.

- Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ soit valeur propre de A et notons u une fonction propre associée. On a alors $(A-\lambda I)(u) = 0$. Comme $u \neq 0$, la question **10** impose $(-\lambda) \in \mathbb{R}^-$ (sinon, $u = 0$ par l'unicité prouvée). Une valeur propre de A est donc forcément un élément de $\mathbb{R}^+$. Si on reprend cette question **10**, on peut même être plus précis. En effet, dès que $\alpha \notin \rho(\mathbb{N})$, on montre encore l'existence et l'unicité d'un antécédent de $g \in \mathcal{C}_\#^\infty$ par $(A+\alpha I)$. Ainsi, seuls les éléments de $\rho(\mathbb{N})$ peuvent être valeurs propres de A.
- Réciproquement, soit $p \in \mathbb{N}$. On a

$$A(e_p) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \rho(|n|) c_n(e_p) e_n = \rho(p) e_p$$

et $\rho(p)$ est donc valeur propre pour A.

On a montré que

$$\mathrm{Sp}(A) = \rho(\mathbb{N})$$

3 Représentations intégrales.

Q.13. On a

$$A^1 \circ A^1(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n| c_n(A^1(f)) e_n$$

Fixons donc $n \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$c_n(A^1(f)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| c_k(f) e_n(\theta) e_{-k\theta}\, d\theta$$

Puisque $\||k|c_k(f)e_n(\theta)e_{-k\theta}\| \leq |k||c_k(f)| = o(1/k^2)$ quand $|k| \to +\infty$ (question **2**), la série de fonctions sous l'intégrale converge normalement et on peut intervertir somme et intégrale (on intègre sur un SEGMENT) pour obtenir

$$c_n(A^1(f)) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|k| c_k(f) \int_0^{2\pi} e_{n-k}(\theta)\, d\theta \right) = |n| c_n(f)$$

On en déduit donc que

$$A^1 \circ A^1(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 c_n(f) e_n = A^2(f)$$

Q.14. Comme $n^2 c_n(f) = -(in)^2 c_n(f) = -c_n(f'')$,

$$A^2(f) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f'') e_n = -f''$$

puisque f'' est somme de sa série de Fourier (elle est C^∞, de classe C^1 par morceaux et continue suffirait). A^2 est donc un opérateur différentiel (et on en a trouvé l'expression).

On a vu que $c_n(A^1(f)) = |n| c_n(f)$. Comme $n \mapsto |n|$ n'est pas polynomiale en n, A^1 n'est pas un opérateur différentiel (question **5**). *Pour justifier qu'une fonction f telle que $\forall x \in \mathbb{Z},\ f(x) = |x|$ n'est pas polynomiale, on raisonne par l'absurde. Si elle l'était alors elle coïnciderait avec le polynôme X en une infinité de points et on aurait $\forall x,\ f(x) = x$ ce qui est exclu puisque $f(-1) = 1$.*

Q.15. La question **13** indique que A^1 est une "racine carrée" de A^2. Par ailleurs, la question 9 appliquée avec A^2 montre que $G\ :\ (t,x) \mapsto Q_t(f)(x)$ vérifie

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

G vérifie donc l'équation de la chaleur. Enfin, A^2 est l'opposé du Laplacien (en dimension 1) et on en a trouvé une "racine".

Q.16. Soient $f \in \mathcal{C}^\infty_\#$, $y \in \mathbb{R}$ et $t > 0$. L'application $x \mapsto \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $O(1/x^2)$ aux voisinages des infinis. C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et on peut écrire

$$G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)\ dx$$

f étant C^∞ est somme de sa série de Fourier et ainsi

$$G(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{t}{t^2+x^2} c_n(f) e^{in(y-x)}\ dx \right)$$

La série de fonction sous l'intégrale (la variable est x) est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ et de somme continue sur $\mathbb{R}$ (cette somme est $x \mapsto \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)$). Pour pouvoir intervertir somme et intégrale, on essaye d'utiliser le théorème d'interversion spécifique aux séries. On s'intéresse donc à

$$v_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} |c_n(f)|\ dx = |c_n(f)| \left[\arctan(x/t)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi |c_n(f)|$$

C'est bien le terme général d'une série convergente et ainsi

$$G(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(c_n(f) e^{iny} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} e^{-inx}\ dx \right)$$

Le changement de variable $u = x/t$ indique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} e^{-inx}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-intu}}{1+u^2}\ du$$

Avec le résultat admis sur $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-intu}}{1+u^2}\ du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|nt|}$$

Finalement

$$G(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e^{iny} \pi e^{-|n|t}$$

On a donc

$$Q_t^1(f)(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)\ dx$$

4 Données initiales continues.

Q.17. Fixons $t > 0$. Pour $f \in \mathcal{C}^0_\#$, on note $I(f)(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)\,dx$. On a vu en question **16** que $I(f)$ et $Q^1_t(f)$ sont égales quand $f \in \mathcal{C}^\infty_\#$.
Soit $\varepsilon > 0$; il existe $p \in \mathcal{C}\#^\infty$ tel que $\|f-p\| \leq \varepsilon$ (car un polynôme trigonométrique est dans $\mathcal{C}\#^\infty$). Avec l'inégalité triangulaire, et comme $I(p) = Q^1_t(p)$,

$$\|Q^1_t(f) - I(f)\| \leq \|Q^1_t(f) - Q^1_t(p)\| + \|I(p) - I(f)\|$$

Or,

$$\|I(p) - I(f)\| = \|I(p-f)\| \leq \|p-f\| \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2}\,dt = \|p-f\| \leq \varepsilon$$

$$\|Q^1_t(f) - Q^1_t(p)\| = \|Q^1_t(p-f)\| \leq \|p-f\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-t|n|}$$

la dernière somme infinie existant bien car $e^{-t} \in [0,1[$ (on peut calculer la “double” somme géométrique). On a donc une constante C (qui ne dépend que de t qui est ici fixé) tel que $\|Q^1_t(f) - I(f)\| \leq (1+C)\varepsilon$. ε étant arbitrairement petit, on a donc

$$Q^1_t(f)(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} f(y-x)\,dx$$

Q.18. En utilisant la définition de $Q^1_t(f)$ sous forme de séries et en isolant le terme d'indice $n = 0$, on a

$$Q^1_t(f)(y) = c_0(f) + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{-t|n|} c_n(f) e_n(y)$$

En integrant entre 0 et 2π on a donc

$$\int_0^{2\pi} Q^1_t(f)(y)\,dy = 2\pi c_0(f) + \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{-t|n|} c_n(f) e_n(y)\,dy$$

et compte-tenu de l'expression de $c_0(f)$,

$$\int_0^{2\pi} (Q^1_t(f)(y) - f(y))\,dy = \int_0^{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} e^{-t|n|} c_n(f) e_n(y)\,dy$$

On a $\|e^{-t|n|} c_n(f) e_n\| \leq \|f\| e^{-t|n|}$ qui est le terme général d'une série convergente (car $t > 0$). Dans l'intégrale ci-dessus, on a donc une série normalement convergente. Comme on est sur un segment, on peut intervertir somme et intégrale et on obtient

$$\int_0^{2\pi} (Q^1_t(f)(y) - f(y))\,dy = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \left(e^{-t|n|} c_n(f) \int_0^{2\pi} e_n(y)\,dy \right) = 0$$

C'est assez étrange au vu de l'énoncé, mais cela permet bien sûr d'affirmer que

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^{2\pi} (f(y) - Q^1_t(f)(y))\,dy = 0$$

Q.19. En remarquant que $\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2+x^2}\,dt = 1$ (vu plus haut), on a

$$Q^1_t(f)(y) - f(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2} (f(y-x) - f(y))\,dy$$

Soit $\varepsilon > 0$; f étant continue en y (que l'on fixe ici), il existe $r > 0$ tel que pour $x \in [-r, r]$, $|f(y-x) - f(y)| \leq \varepsilon$. On découpe alors l'intégrale en trois morceaux et on majore par inégalité triangulaire (en vérifiant que chaque morceau existe) pour obtenir

$$|Q_t^1(f)(y) - f(y)| \leq \frac{2\|f\|}{\pi} \int_{-\infty}^{-r} \frac{-t}{t^2+x^2}\,dt + \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-r}^{r} \frac{|t|}{t^2+x^2}\,dt + \frac{2\|f\|}{\pi} \int_{r}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2}\,dt$$

On a

$$\int_{-r}^{r} \frac{|t|}{t^2+x^2}\,dt = 2\int_0^r \frac{t}{t^2+x^2}\,dt \leq 2\int_0^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2}\,dt = \pi$$

$$\frac{2\|f\|}{\pi} \int_{-\infty}^{-r} \frac{-t}{t^2+x^2}\,dt = \frac{2\|f\|}{\pi} \int_{r}^{+\infty} \frac{t}{t^2+x^2}\,dt = \frac{2\|f\|}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(r/t)\right)$$

Quand $t \to 0^+$, $\frac{\pi}{2} - \arctan(r/t) \to 0$. Il existe donc $\tau > 0$ tel que cette quantité soit plus que ε pour $t \in]0, \tau]$. Ainsi,

$$\forall t \in]0, \tau],\ |Q_t^1(f)(y) - f(y)| \leq (1 + \frac{4\|f\|}{\pi})\varepsilon$$

Par définition, on a prouvé que

$$f(y) = \lim_{t \to 0^+} Q_t^1(f)(y)$$

5 Décroissance de l'énergie.

Q.20. Soit $t > 0$. Dans l'expression de $Q_t^1(f)$ sous forme de série, on a une série normalement convergente et avec la question **3** on l'interprète comme la somme d'un DSF. Par identité de Parseval, on a alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q_t^1(f)(x)|^2\,dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2t|n|} |c_n(f)|^2$$

et ainsi

$$\forall t > 0,\ E(t) = \pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2t|n|} |c_n(f)|^2$$

Ceci reste vrai pour $t = 0$ (c'est encore l'identité de Parseval pour f continue). Avec cette expression, la décroissance de E est immédiate sur $\mathbb{R}^+$.
Notons $h_n\ :\ t \mapsto e^{-2t|n|}|c_n(f)|^2$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |h_n(t)| \leq |c_n(f)|^2$$

Le majorant est indépendant de t et est le terme général d'une série convergente (Parseval). $\sum(h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$. En outre

$$\forall n \in \mathbb{Z}^*,\ \lim_{t \to +\infty} h_n(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to +\infty} h_0(t) = |c_0(f)|^2$$

Par théorème de double limite, on a donc

$$\lim_{t \to +\infty} E(t) = \pi |c_0(f)|^2$$