Mines PSI 1

Un corrigé

1 Trace.

Q.1. On note $m_{i,j}$ le coefficient générique d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n$. On a alors, pour $A, B \in \mathcal{M}_n$,

$$\forall i \in [1, n],\ (AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}$$

et donc

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \right)$$

Les sommes étant indépendantes, on peut tout regrouper en une unique somme indicée par un couple

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{(i,k) in [1,n]^2} a_{i,k} b_{k,j}$$

Dans cette expression, A et B jouent des rôles symétriques et ainsi

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Q.2. Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et A, B les matrices représentant T dans deux bases $\mathcal{B}_a$ et $\mathcal{B}_b$. En notant P la matrice de passage de $\mathcal{B}_a$ à $\mathcal{B}_b$, on a $P^{-1}AP = B$ et donc

$$\text{Tr}(B) = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(PP^{-1}A) = \text{Tr}(A)$$

On peut donc parler de la trace de T (trace de l'une quelconque des matrices représentant T dans une base).

2 Projecteurs.

Q.3. On veut montrer que tout élément de X se décompose de façon unique comme somme d'un élément de $N(P)$ et d'un élément de $R(P)$. Raisonnons par conditions nécessaires puis suffisantes. Soit donc $x \in X$.

- Supposons que $x = y + z$ avec $y \in N(P)$ et $z \in R(P)$. On a alors $P(x) = P(z) = z$ (car P agit comme l'identité sur son image puisque $P^2 = P$). On en déduit que $z = P(x)$ et $y = x - P(x)$. La décomposition, si elle existe est unique.
- Réciproquement, $x = (x - P(x)) + P(x)$ est une décomposition acceptable ($P(x) \in R(P)$ et $x - P(x) \in N(P)$ car $P^2 = P$).

Q.4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base adaptée à la décomposition $X = R(P) \oplus N(P)$ (obtenue en concaténant une base $(e_1, \dots, e_r)$ de $R(P)$ et une autre de $N(P)$). Avec **Q.2** on peut utiliser cette base pour calculer la trace de P. On a $P_{\mathcal{B}} = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ qui est de trace

$$\text{Tr}(P) = r = \dim(N(P)) = \text{rg}(P)$$

Q.5. Notons $p = \dim(F)$ et $q = \dim(F)$. Notons $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_q)$ une base de G. La famille $(f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est constituée d'éléments de $F + G$ et engendre $F + G$. Son cardinal est donc supérieur à la dimension de $F + G$ ce qui prouve que

$$\dim(F + G) \leq \dim(F) + \dim(G)$$

On aurait aussi pu utiliser la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Par une récurrence immédiate (sur m), on peut montrer que si $F_1, \dots, F_m$ sont des sous-espaces de X alors

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{m} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)$$

Q.6. On suppose que $S = P_1 + \cdots + P_m$ et on a donc

$$R(S) \subset R(P_1) + \cdots + R(P_m)$$

En passant aux dimensions, les P_i étant des projecteurs ceci s'écrit (avec le résultat généralisé de **Q.5** et **Q.4**)

$$\mathrm{rg}(S) \leq \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Tr}(P_i)$$

Par linéarité de la trace, on conclut que

$$\mathrm{rg}(S) \leq \mathrm{Tr}\left(\sum_{i=1}^{m} P_i\right) = \mathrm{Tr}(S)$$

Et bien sûr, on a

$$\mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Tr}(P_i) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{rg}(P_i) \in \mathbb{N}$$

puisqu'une somme d'entiers naturels est un entier naturel

3 Décomposition en somme de projecteurs orthogonaux.

Q.7. T étant symétrique, il existe (théorème spectral) une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}TP = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ où les d_k sont les valeurs propres de T. On a alors

$$(x|T(x)) = {}^t x T x = {}^t x P \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) P^{-1} x$$

En notant $y = P^{-1}x$, on a ${}^t y = {}^t x P$ (car P est orthogonale) et donc (les y_i étant les coefficients de y)

$$(x|T(x)) = {}^t y \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n) y = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2$$

Si les d_i sont tous positifs alors T est immédiatement positive. Réciproquement, en choisissant $x = Pe_i$ la positivité de T entraîne $d_i \geq 0$. On a donc l'équivalence voulue.

Q.8. Soit P un projecteur.

- Supposons que P est un projecteur orthogonal. On a alors $N(P)$ et $R(P)$ qui sont orthogonaux (et même supplémentaires orthogonaux). Si $x \in X$ alors $x - P(x) \in N(P)$ (car $P^2 = P$) et ce vecteur est donc orthogonal à tout élément de $R(P)$. Ainsi

$$\forall x \in X,\ \forall y \in R(P),\ (x - P(x)|y) = 0$$

- Supposons cette propriété vérifiée. Soit alors $z \in N(P)$ et $y \in R(P)$. On a

$$(z|y) = (z - P(z)|y) = 0$$

et donc P est un projecteur orthogonal (noyau et image orthogonaux).

Q.9. Soit P un projecteur.

- Supposons que P est un projecteur orthogonal. En concaténant une base orthonormée de $R(P)$ et une base orthonormée de $N(P)$, on obtient une base orthonormée de X (car noyau et image sont supplémentaires orthogonaux). Dans cette base orthonormée, P est représenté par la matrice diagonale $\text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ et donc symétrique. P est ainsi un endomorphisme symétrique. Il est même positif puisque $\sigma(P) \subset \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^+$.
- Réciproquement, supposons que P soit symétrique. Soient alors $x \in N(P)$ et $y \in R(P)$. On a $P(y) = y$ (car $P^2 = P$) et donc

$$(x|y) = (x|P(y)) = (P^*(x)|y) = (P(x)|y) = (0|y) = 0$$

ce qui montre que $N(P)$ et $R(P)$ sont orthogonaux et que le projecteur P est orthogonal.

Q.10. On a (en notant λ_i la valeur propre associée à e_i)

$$R(T) = \text{Vect}(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \text{Vect}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n)$$

Les λ_i non nuls étant ceux de numéro $\leq r$, on en déduit que

$$R(T) = \text{Vect}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_r e_r) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r) = Y$$

et en particulier on a (les e_i étant indépendants)

$$\text{rg}(T) = \dim(R(T)) = r$$

Par définition, Z est composé d'éléments du noyau. Comme $N(T)$ est de dimension $n - r$ (théorème du rang) comme Z (on a une base de Z avec $n - r$ éléments) on en déduit que l'inclusion est une égalité :

$$N(T) = Z$$

Q.11. Q_i est représenté par $E_{i,i}$ dans une base orthonormée. $E_{i,i}$ étant symétrique, Q_i est symétrique. De plus $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$ montre que Q_i est un projecteur. Avec **Q.9**, c'est un projecteur orthogonal. Enfin, on a $\text{rg}(Q_i) = \text{rg}(E_{i,i}) = 1$ (ou encore $R(Q_i) = \text{Vect}(e_i)$ est de dimension 1).

Q.12. Si, par l'absurde, les λ_i étaient tous ≤ 1, la trace de T serait inférieure ou égale à r, ce que l'on exclut ici. Il existe donc un indice $i \in [1, r]$ tel que $\lambda_i > 1$.
Dans la base orthonormée $\mathcal{B}$, $T - Q_i$ est représenté par par la matrice diagonale

$$D_i = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$$

Cette matrice est symétrique à coefficients diagonaux positifs et $T - Q_i$ est donc symétrique positive (représentée par une matrice symétrique en b.o.n. et de spectre inclus dans $\mathbb{R}^+$). De plus, son rang est égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls de D_i ce qui donne

$$\text{rg}(T - Q_i) = r = \text{rg}(T)$$

Enfin, par linéarité de la trace,

$$\text{Tr}(T - Q_i) = \text{Tr}(T) - \text{Tr}(Q_i) = \text{Tr}(T) - 1$$

Q.13. L'idée est d'itérer la question **12**. On procède par récurrence sur la quantité $\text{Tr}(T) - \text{rg}(T)$. L'hypothèse au rang q est la suivante.
H_q : "si $T \in \mathcal{L}(X)$ est symétrique positif et vérifie $\text{Tr}(T) \in \mathbb{N}$ et $\text{Tr}(T) - \text{rg}(T) = q$ alors il existe S symétrique positif tel que $R(T)$ soit stable par S, $\text{Tr}(S) = \text{rg}(S) = \text{rg}(T)$ et que $T - S$ soit la somme de q projecteurs orthogonaux de rang 1."

- <u>Initialisation</u> ($q = 0$) : on se donne $T \in \mathcal{L}(X)$ symétrique positif tel que $\text{Tr}(T) \in \mathbb{N}$ et $\text{Tr}(T) = \text{rg}(T)$. Si on pose $S = T$, on obtient un endomorphisme convenable (T est symétrique positif, $R(T)$ est bien sûr stable par T, $\text{Tr}(T) = \text{rg}(T)$ par hypothèse et $T - S$ est nul donc somme de 0 projecteurs orthogonaux de rang 1).

- Hérédité : soit $q \geq 0$ tel que le résultat est vrai jusq'au rang q. On se donne $T \in \mathcal{L}(X)$ symétrique positif tel que $\mathrm{Tr}(T) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Tr}(T)-\mathrm{rg}(T) = q+1$. Comme $q+1 > 0$, la question **12** donne un projecteur orthogonal Q de rang 1. $T' = T - Q$ vérifie les hypothèses de H_q (car la trace diminue de 1) et nous fournit S symétrique positif tel que $T' - S$ est la somme de q projecteurs orthogonaux $Q_1, \dots, Q_q$ de rang 1. On a alors $T - S = Q_1 + \cdots + Q_q + Q$ qui est la somme de q projecteurs orthogonaux de rang 1. De plus

$$\mathrm{Tr}(S) = \mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(T') = \mathrm{rg}(T' - Q) = \mathrm{rg}(T)$$

Enfin, $R(T')$ est stable par S mais la construction de **12** donne $R(T') = R(T)$. On a donc toutes les propriétés voules pour S.

De façon plus simple à comprendre, on part de T et on trouve Q_1 avec **12**. *On recommence avec $T - Q_1$ pour obtenir Q_2 puis avec $T - Q_1 - Q_2$ jusqu'à tomber sur un endomorphisme de trace égale au rang de T. On aurait ainsi pu aussi construire les Q_i par récurrence dans ce sens.*

Q.14. *Le sujet est ici un peu ambigu. On peut donner deux interprétations à la questions :*
- *soit on utilise la décomposition que l'on a trouvée et il s'agit donc de montrer qu'il existe une décomposition convenable donnant un S tel que $S|_Y$ est inversible ;*
- *soit il s'agit de montrer que pour toute décomposition convenable on a $S|_Y$ inversible.*

C'est bien sûr la seconde interprétation qu'il faut privilégier. On doit donc juste utiliser les propriétés vérifiées par S et pas la manière particulière dont on a construit un S convenable.
On sait que S est symétrique positif et vérifie $\mathrm{Tr}(S) = \mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(T)$. De plus, on a l'existence de projecteurs orthogonaux de rang 1 que l'on note $P_1, \dots, P_k$ avec $k = \mathrm{Tr}(T) - \mathrm{rg}(T)$ tels que $T = S + P_1 + \cdots + P_k$. Enfin, $Y = R(T)$ est stable par S et $S|_Y$ est un endomorphisme de Y. Comme Y est de dimension finie, l'inversibilité de $S|_Y$ équivaut à son injectivité ou a sa surjectivité.
Soit $x \in N(T)$; on a alors $S(x)+P_1(x)+\cdots+P_k(x) = 0$ et donc $(S(x)|x)+\sum_{i=1}^k (P_i(x)|x) = 0$. Comme S et les P_i sont positifs, on a une somme de terme positifs qui est nulle et chaque terme est nul. En particulier $(S(x)|x) = 0$. En décomposant x sur une b.o.n de vecteurs propres pour S (qui existe puisque S est symétrique), on montre comme en question **Q.7** que ceci entraîne $x \in N(S)$ (si $x = \sum x_i f_i$, $(Sx|x) = \sum \mu_i x_i^2$ et les x_i associés à des $\mu_i \neq 0$ doivent être nuls). On a ainsi montré que

$$N(T) \subset N(S)$$

On en déduit que $R(S|_Y) = R(S)$ (inclusion directe immédiate ; réciproquement, un élément de $R(S)$ s'écrit $S(x)$ et on peut décomposer $x = y + z$ avec $y \in Y$ et $z \in Z$ pour obtenir $S(x) = S(y) \in R(S|_Y)$) et donc que

$$\mathrm{rg}(S|_Y) = \mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(T) = \dim(Y)$$

ce qui prouve que $S|_Y$ est un endomorphisme surjectif de Y et donc un élément de $GL(Y)$. On notera au passage que l'on a prouvé que

$$N(T) = N(S)$$

puisque l'on a une inclusion et l'égalité des dimensions.

Q.15. U^{-1} est symétrique comme inverse d'un endomorphisme symétrique (U étant symétrique comme restriction à un sous-espace stable d'un symétrique). On en déduit la symétrie de ξ.
La linéarité de ξ par rapport à la seconde variable est conséquence de la même propriété pour le produit scalaire sur X.
Soit $y \in Y$; on le décompose en $y = \sum_{i=1}^r y_i \varepsilon_i$. On a alors **en supposant que les ε_i forment une b.o.n. de U** (ce qui est possible car un endomorphisme symétrique est diagonalisable en b.o.n.)

$$\xi(y, y) = (U^{-1}y|y) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i} y_i^2$$

qui est positif et n'est nul que si les y_i sont tous nuls. ξ est donc défini positif sur Y et c'est finalement un produit scalaire sur Y.

Q.16. Distinguons deux cas.

- Si tous les μ_i valent 1 alors $U = Id_Y = U^{-1}$ et tout vecteur $w \in Y$ tel que $\|w\| = 1$ (et il en existe si on suppose $r \geq 1$ ce qui est implicite ici) convient.
- Sinon, comme $\mu_1 + \cdots + \mu_r = r$ et $\mu_i \geq 0$, les μ_i ne sont pas tous ≤ 1 ni tous ≥ 1 et on peut trouver i, j tels que $\mu_i < 1 < \mu_j$. Posons $w = a_i\varepsilon_i + a_j\varepsilon_j$; on a

$$\|w\|^2 = a_i^2 + a_j^2 \text{ et } \xi(w, w) = \frac{1}{\mu_i}a_i^2 + \frac{1}{\mu_i}a_j^2$$

On est amenés à résoudre le système $\begin{cases} x + y = 1 \\ x/\mu_i + y/\mu_j = 1 \end{cases}$. Il admet comme solution

$$x = \frac{1 - \frac{1}{\mu_j}}{\frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_j}} > 0 \text{ et } y = \frac{\frac{1}{\mu_i} - 1}{\frac{1}{\mu_i} - \frac{1}{\mu_j}} > 0$$

En posant $a_i = \sqrt{x}$ et $a_j = \sqrt{y}$, on obtient un vecteur $w \in Y$ qui convient.

Remarque : comme en **Q.15** *on a supposé que les ε_i forment une b.o.n. de U.*

Q.17. On procède en deux temps.

- Supposons que P est un projecteur orthogonal de rang 1. Notons z un vecteur unitaire de $R(P)$ (en sorte que $R(P) = \mathrm{Vect}(z)$ et $N(P) = \mathrm{Vect}(z)^\perp$). Si $x \in X$, $P(x) \in R(P)$ et il existe a tel que $P(x) = az$ et $(P(x)|z) = a(z|z) = a$. On a donc

$$\forall x \in X,\ P(x) = (x|z)z$$

- Réciproquement, supposons ces relations vérifiées. P est alors linéaire et $N(P) = \mathrm{Vect}(z)^\perp$. De plus $P(z) = z$. P est donc le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(z)$ et est donc un projecteur orthogonal de rang 1.

Q.18. *Là encore, on pourrait utiliser le w particulier trouvé plus haut ou utiliser un w convenable général. Et là encore c'est la seconde piste que j'explore.*

$F = S - P_w$ est immédiatement symétrique. Soit $x \in X$. On peut le décomposer sous la forme $x = y + z$ avec $y \in Y$ et $z \in Z$. Comme S est nulle sur Z ainsi que P_w on a

$$((S - P_w)(x)|x) = (S(y) - P_w(y)|y + z)$$

et comme $S(y) - P_w(y) \in Y$ et Y et Z orthogonaux,

$$((S - P_w)(x)|x) = (S(y) - y) - (P_w(y)|y) = (U(y)|y) - (y|w)^2$$

Posons $y' = U(y)$. On a alors

$$(y|w)^2 = (U^{-1}(y'), w)^2 = \xi(y', w)^2$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\xi(y', w)^2 \leq \xi(y', y')\xi(w, w) = \xi(y', y') = (y|U(y))$$

On en déduit finalement que

$$((S - P_w)(x)|x) \geq 0$$

ce qui permet de conclure que $S - P_w$ est aussi positif.

Q.19. On a déjà remarqué que $N(S) = N(T)$. Comme $N(T)$ est orthogonal à $z \in Y$, on a aussi $N(T) \subset N(P_w)$. Ainsi, $N(T) = N(S) \subset N(S - P_w)$. Par ailleurs,

$$(S - P_w)(U^{-1}(w)) = S(U^{-1}(w)) - (U^{-1}(w)|w)w = w - \xi(w, w)w = 0$$

et donc $U^{-1}(w) \in N(S - P_w)$. On a finalement

$$N(S) + \mathrm{Vect}(U^{-1}w) \subset N(S - P_w)$$

et cette somme est directe et même directe orthogonale puisque $U^{-1}w$ est inclus dans $Y = N(S)^\perp$:

$$N(S) \oplus \mathrm{Vect}(U^{-1}w) \subset N(S - P_w) \qquad (*)$$

En écrivant que $S = (S - P_w) + P_w$, on a aussi $\mathrm{rg}(S) \leq \mathrm{rg}(S - P_w) + 1$ et, par théorème du rang

$$\dim(N(S - P_w)) \leq \dim(N(s)) + 1 \qquad (**)$$

En passant aux dimensions dans $(*)$ et avac $(**)$ on obtient

$$\dim(N(S - P_w)) = \dim(N(s)) + 1 \qquad (***)$$

et $(*)$ donne alors

$$N(S) \oplus \mathrm{Vect}(U^{-1}w) = N(S - P_w)$$

$(***)$ et le théorème du rang nous permet de conclure aussi que

$$\mathrm{rg}(S - P_w) = \mathrm{rg}(S) - 1$$

Q.20. Posons $S' = S - P_w$; c'est un endomorphisme symétrique et positif de rang $r - 1$ égal à sa trace. Sa restriction U' à son image Y' est inversible. Comme en question **16** on trouve un vecteur w' qui nous permet de construire P'_w projecteur orthogonal de rang 1 tel que $S' - P_{w'}$ est symétrique positif de rang $r-2$. On itére le processus jusqu'à tomber sur un endomorphisme symétrique de rang nul. On a alors écrit S comme somme de projecteurs orthogonaux de rang 1.

Q.21. Soit T un endomorphisme symétrique positif.
Si T est somme finie de projecteurs orthogonaux, alors la question **6** montre que la trace de T est entière et plus grande que son rang.
Réciproquement, si cette propriété est vérifiée, la question **13** permet d'écrire T comme somme de S et de projecteurs orthogonaux de rang 1 et S, avec la question **20**, s'écrit aussi come somme de projecteurs orthogonaux de rang 1. T est donc a fortiori somme finie de projecteurs orthogonaux (et même de rang 1).