Mines PSI 2

La formule du triple produit de Jacobi

1 Préambule.

Q.1. Commençons par justifier informellement la formule. Si on développe le produit dans le membre de gauche on voit apparaître une somme de 2^n termes. L'un d'entre eux vaut 1 est s'annule avec le -1. Il reste une somme de $2^n - 1$ termes. Si on applique l'inégalité triangulaire, on obtiendra un majorant qui est exactement celui demandé.

On peut formaliser, comme il est demandé, en procédant par récurrence sur n.

- Initialisation : pour $n = 1$, le résultat de lit $|\zeta_1| \leq |\zeta_1|$ et est objectivment vrai.
- Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que le résultat soit vrait jusqu'au rang n. En notant $A_n = \prod_{k=1}^n (1+\zeta_k)$, on a

$$|A_{n+1} - 1| = |(1 + \zeta_{n+1})A_n - 1| \leq |A_n - 1| + |\zeta_{n+1}A_n|$$

On utilise alors l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} |A_{n+1} - 1| &\leq \prod_{k=1}^{n} (1 + |\zeta_k|) - 1 + |\zeta_{n+1}| \prod_{k=1}^{n} |1 + \zeta_k| \\ &= (1 + |\zeta_{n+1}|) \prod_{k=1}^{n} (1 + |\zeta_k|) - 1 \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} (1 + |\zeta_k|) - 1 \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat au rang $n + 1$.

2 La formule de Jacobi.

Q.2. Posons $u_n = \prod_{k=1}^n (1 - x^{2k})$. (u_n) est une suite à termes > 0 et $u_{n+1}/u_n = (1 - x^{2n+2}) < 1$. (u_n) est ainsi une suite décroissante et minorée par 0. Par théorème de limite monotone, elle converge et $Q(x)$ existe bien.

Q.3. Posons $v_n = \prod_{k=1}^n \rho_k$. Distinguons deux cas.

- Si $\exists\, k_0/\ \rho_{k_0} = 0$ alors (v_n) est nulle à partir d'un certain rang et converge donc.
- Sinon, (v_n) est à termes > 0 et $\ln(v_n) = \sum_{k=1}^n \ln(\rho_k)$. Par inégalité triangulaire, on a

$$1 - |z^2||x|^{2k-1} \leq \rho_k \leq 1 + |z^2||x|^{2k-1}$$

Comme $|x| < 1$, ces termes sont > 0 pour k assez grand ($k \geq k_0$) et, par croissance du logarithme,

$$\ln(1 - |z^2||x|^{2k-1}) \leq \ln(\rho_k) \leq \ln(1 + |z^2||x|^{2k-1})$$

Majorant et minorant étant $O(|z^2||x|^{2k-1})$ quand $k \to +\infty$ (car $\ln(1 + t) = O(t)$ quand $t \to 0$) on a donc aussi $\ln(\rho_k) = O(|z^2||x|^{2k-1}) = O(|x|^{2k})$ qui est le terme général d'une série absolument convergente (comparaison à une série géométrique qui l'est). Ainsi, $\sum(\ln(\rho_k))$ converge ou encore $(\ln(v_n))$ converge. Par continuité de la fonction exponentielle, (v_n) converge aussi.

Le produit $\prod_{k=1}^\infty \rho_k$ est ainsi toujours convergent.

Q.4. Dans cette question, on chiost d'écrire z sous forme trigonométrique, c'est à dire sous la forme $z = re^{i\theta}$ (avec $r > 0$ puisque $z \neq 0$).
Comme $|x| < 1$, $z_k = 1 + z^2 x^{2k-1} \to 1$. En particulier, il existe un rang k_0 à partir duquel $\Re(z_k) > 0$ (puisque $\Re(z_k) \to 1$). On a alors

$$\forall k \geq k_0,\ \theta_k = \arctan\left(\frac{r^2 x^{2k+1}\sin(2\alpha)}{1 + r^2 x^{2k-1}\cos(\alpha)}\right)$$

Le terme dans arctan est de limite nulle et on a donc

$$\theta_k \sim \frac{r^2 x^{2k+1}\sin(2\alpha)}{1 + r^2 x^{2k-1}\cos(\alpha)} \sim r^2 x^{2k+1}\sin(2\alpha)$$

$\sum(\theta_k)$ est donc une série absolument convergente (comparaison à une série géométrique).

Q.5. Posons $h_n = \prod_{k=1}^n (1 + z^2 x^{2k-1})$; on a

$$h_n = \left(\prod_{k=1}^n \rho_k\right).e^{i\sum_{k=1}^n \theta_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \left(\prod_{k=1}^\infty \rho_k\right).e^{i\sum_{k=1}^\infty \theta_k}$$

et $H(x, z)$ existe donc (le produit qui définit cette quantité converge).

Q.6. Il s'agit a priori d'un problème d'interversion entre un produit infini et une limite. Le cours nous donne des outils pour intervertir une somme infinie et une limite et on va donc se ramenr à ce cas comme en question 3. Pour $|x| < 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $1 - x^{2k} > 0$ et on peut en prendre le logarithme. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - x^{2k}) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(1 - x^{2k})\right)$$

On veut passer à la limite $n \to +\infty$ ci-dessus. A $x \in]-1, 1[$ fixé, on a $\ln(1 - x^{2k}) \sim -x^{2k}$ quand $k \to +\infty$ et c'est le terme général d'une série absolument convergente. On peut ainsi affirmer que

$$\forall x \in]-1, 1[,\ Q(x) = \exp\left(\sum_{k=1}^\infty \ln(1 - x^{2k})\right)$$

On s'intéresse à la série de fonctions de terme général $f_k(x) = \ln(1 - x^{2k})$.
- $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ f_k(x) \to 0$ quand $x \to 0$.
- $\forall x \in [-1/2, 1/2],\ |f_k(x)| = -\ln(1 - x^{2k}) \leq -\ln(1 - 1/4^k)$ et donc $\|f_k\|_{\infty,[-1/2,1/2]} \leq -\ln(1 - 1/4^k) \sim \frac{1}{4^k}$ qui est le terme général d'une série convergente. $\sum(f_k)$ est donc normalement convergente sur $[-1/2, 1/2]$.

Par théorème de double limite, on a $\sum_{k=1}^n \ln(1 - x^{2k}) \to 0$ quand $x \to 0$. Il reste à utiliser la continuité de exp pour en déduire que

$$\lim_{x\to 0} Q(x) = 1$$

Remarque : on a répondu à la question...mais sans utiliser (1). Essayons de voir comment on aurait pu l'utiliser. Avec l'inégalité (1) utilisée avec $\zeta_k = -x^{2k}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\prod_{k=1}^n (1 - x^{2k}) - 1\right| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |x|^{2k}) - 1$$

On veut, là encore, faire tendre n vers $+\infty$. On procède comme en question 3 (passage par l'exponentielle) pour montrer que $\prod_{k=1}^n (1 + |x|^{2k})$ admet une limite finie quand $n \to +\infty$ (car

$\ln(1+|x|^{2k}) \sim |x|^{2k}$ *quand* $k \to +\infty$ *et c'est le terme général d'une série convergente). On a donc*

$$\forall |x|<1,\ |Q(x)-1| \le \prod_{k=1}^{\infty}(1+|x|^{2k})-1$$

On ne progresse pas beaucoup puisque l'on obtient un majorant qui a la même tête. L'avantage est que le signe $-$ *a disparu...On pourrait adapter la méthode précédente pour montrer que le majorant est de limite nulle... mais honnêtement, je ne vois pas ce que l'on a gagné.*
On peut aussi revenir aux ε *et tirer profit de la décroissance de* $x \mapsto 1+|x|^{2k}$ *sur* $[0,1[$ *(mais je ne vois pas comment un étudiant normal peut y penser). Allons-y.*
Fixons $\varepsilon \in [0,1]$ *; pour* $x \in [0,1/2]$ *on a (avec la décroissance annoncée)* $\prod_{k\ge n+1}(1+1/4^k) = \exp\left(\sum_{k\ge n+1}\ln(1+1/4^k)\right) \to \exp(0)=1$ *quand* $n\to+\infty$. *On peut donc trouver un* N *tel que cette quantité soit* $\le 1+\varepsilon$. *On a alors pour tout* $x\in[0,1/2]$,

$$\begin{aligned} 1 \le \prod_{k=1}^{\infty}(1+|x|^{2k}) &\le \prod_{k=1}^{N}(1+|x|^{2k}) \prod_{k=N+1}^{\infty}(1+|x|^{2k}) \\ &\le \prod_{k=1}^{N}(1+|x|^{2k}) \prod_{k=N+1}^{\infty}(1+1/4^k) \\ &\le \prod_{k=1}^{N}(1+|x|^{2k})(1+\varepsilon) \end{aligned}$$

N *étant fixé,* $\prod_{k=1}^{N}(1+|x|^{2k}) \to 1$ *quand* $x\to 0$ *donc il existe* a *tel que* $\forall x\in[0,a]$, *cette quantité soit* $\le 1+\varepsilon$ *et*

$$\forall x\in[0,a],\ 1 \le \prod_{k=1}^{\infty}(1+|x|^{2k}) \le (1+\varepsilon)^2$$

ou encore

$$\forall x\in[0,a],\ 0 \le \prod_{k=1}^{\infty}(1+|x|^{2k})-1 \le 2\varepsilon+\varepsilon^2 \le 3\varepsilon$$

En résumé,

$$\forall \varepsilon\in]0,1],\ \exists a>0/\ \forall x\in[0,a],\ 0\le \prod_{k=1}^{\infty}(1+|x|^{2k})-1 \le 3\varepsilon$$

Par définition des limites, $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|x|^{2k}) \to 1$ *quand* $x\to 0^+$. *C'est la même chose en* 0^- *par imparité et avec notre inégalité initiale, on retrouve* $Q(x)\to 1$ *quand* $x\to 0$.

Q.7. On suppose que $x\neq 0$ (et toujours $|x|<1$) pour pouvoir écrire $F(x,xz)$. On a

$$F(x,xz) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+z^2x^{2k+1}) \prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{-2}x^{2k-3})$$

Dans le second produit, on veut isoler le terme pour $k=1$. Il convient de justifier que l'on en a le droit. Pour $n\ge 2$, on a

$$\prod_{k=1}^{n}(1+z^{-2}x^{2k-3}) = (1+z^{-2}x^{-1})\prod_{k=2}^{n}(1+z^{-2}x^{2k-3})$$

Chacun des produits infinis existe (même chose qu'en question 5) et on peut passer à la limite...On réindice alors le produit obtenu pour obtenir

$$F(x,xz) = (1+z^{-2}x^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^2x^{2k+1})\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{-2}x^{2k-1})$$

Remarque : même si $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ existe, on n'a pas toujours le droit d'écrire que ce produit est égal à $a_1 \prod_{k=2}^{\infty} a_k$. Il faut en effet s'assurer que le nouveau produit infini qui apparaît existe. Si $a_i = (i-1)$, on obtient un contre-exemple puisque $\prod_{k=1}^{\infty}(k-1)$ existe et est nul alors que $\prod_{k=2}^{\infty}(k-1)$ n'existe pas (les produits partiels valent $n!$ et tendent vers l'infini).
On remarque que $1 + z^{-2}x^{-1} = \frac{z^2x+1}{z^2x}$. Avec un "produit en croix", on en déduit que

$$z^2xF(x, xz) = (1+z^2x)\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^2x^{2k+1})\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{-2}x^{2k-1})$$

On regroupe les deux premiers termes (dans ce sens, pas de problème...) et on réindice le produit pour conclure que

$$xz^2F(x, xz) = F(x, z)$$

Q.8. Comme $0^k = 0$ pour tout entier $k \geq 1$, on a immédiatement

$$F_1(x, 0) = a_0(x)$$

De même, en remarquant que

$$\forall z \neq 0,\ \frac{F_1(x,z) - F_1^n(x,z)}{z^{n+1}} = a_n(x) + \sum_{k\geq 1} a_{k+n+1}(x)z^k$$

on obtient (les quantités écrites existent car la série entière est de rayon infinie et on a donc convergence obsolue pour tout z)

$$\forall z \neq 0,\ \left|\frac{F_1(x,z) - F_1^n(x,z)}{z^{n+1}} - a_n(x)\right| \leq \sum_{k\geq 1} |a_{k+n+1}(x)|.|z|^k = G(|Z|)$$

G est une fonction de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ comme somme de série entière. Elle est donc continue en 0 et $G(t) \mapsto G(0) = 0$ quand $t \to 0$. Par composition des limites, on a donc $G(|z|) \to 0$ quand $z \to 0$ et ainsi

$$a_{n+1}(x) = \lim_{z\to 0} \frac{F_1(x,z) - F_1^n(x,z)}{z^{n+1}}$$

Q.9. Supposons $F(x,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k(x)z^k$ pour tout $|x| < 1$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$ où F est définie par (4). Posons

$$G_1(x,z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(x)z^k \ \text{ et } \ G_2(x,z) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(x)z^k$$

On a alors $F(x,z) = G_1(x,z) + G_2(x,z^{-1})$ et, pour x fixé, $G_1(x,\xi)$ et $G_2(x,\xi)$ sont les sommes respectives de deux séries entières de rayon de convergence infini. L'unicité ADMISE par l'énoncé indique que $F_1 = G_1$ et que $F_2 = G_2$.
$x \in]-1,1[$ étant fixé, on montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N},\ a_k(x) = d_k(x)$.
- Initialisation : le procédé de la question 8 (utilisé deux fois) montre que $a_0(x) = F_1(x,0) = G_1(x,0) = d_0(x)$. Le résultat est donc vrai au rang 0.
- Hérédité : soit $n \geq 0$; supposons le résultat vrai jusq'au rang n. En particulier, on a

$$\forall z,\ F_1^n(x,z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)z^k = \sum_{k=0}^{n} d_k(x)z^k = G_1^n(x,z)$$

Le procédé de la question 8 (utilisé deux fois) montre que

$$a_{n+1}(x) = \lim_{z\to 0} \frac{F_1(x,z) - F_1^n(x,z)}{z^{n+1}} = \lim_{z\to 0} \frac{G_1(x,z) - G_1^n(x,z)}{z^{n+1}} = d_{n+1}(x)$$

et l'hypothèse est donc encore vraie au rang $n+1$.

On peut faire le même travail avec F_2 et G_2 en lieu et place de F_1 et G_1 pour obtenir $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{-k}(x) = d_{-k}(x)$. On a finalement prouvé que

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ a_k(x) = d_k(x)$$

Q.10. Pour tout complexe z, $(-z)^2 = z^2$ et donc quand $|x| < 1$ et $z \neq 0$, $F(x,z) = F(x,-z)$. Ainsi

$$\forall |x| < 1,\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(x) z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k a_k(x) z^k$$

L'unicité prouvé à la question précédente indique que $\forall k,\ a_k = (-1)^k a_k$ et les fonctions a_{2m+1} sont nulles pour tout entier relatif m. Finalement,

$$\forall |x| < 1,\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ F(x,z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{2m}(x) z^{2m}$$

et il suffit de poser $b_m = a_{2m}$ pour obtenir la formule désirée.

Q.11. En utilisant la question 7, on obtient simplement

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ F(x,z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^{2k-1} b_{k-1}(x) z^{2k}$$

On a envie d'utiliser l'unicité prouvée en question 9. On n'est cependant pas dans le même cadre car ici l'égalité n'est pas valable pour $x = 0$. Il reste à voir si cela est problématique...En question 9, on a travaillé à x FIXE mais seulement après justifié que $F_1 = G_1$ et $F_2 = G_2$. Ces égalités proviennent, elles, du résultat admis par l'énoncé. Or, celui-ci ne dit pas si l'unicité admise est vraie pour tout x fixé ou si elle n'est vraie que si l'égalité a lieu pour tout $x \in]-1,1[$. Il faut certainement supposer que c'est la première situation qui est la bonne, ce que je fais désormais. Je peux alors utiliser la question 9 pour justifier que

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ b_k(x) = b_{k-1}(x) x^{2k-1}$$

Q.12. On a immédiatement $\forall |x| < 1,\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ F(x,z) = F(x,z^{-1})$ et donc

$$\forall |x| < 1,\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(x) z^{2k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(x) z^{-2k}$$

Un changement d'indice dans la seconde somme donne

$$\forall |x| < 1,\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(x) z^{2k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{-k}(x) z^{2k}$$

et la question 9 donne alors

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall |x| < 1,\ b_k(x) = b_{-k}(x)$$

La question 11 et une récurrence assez simple montrent que

$$\forall m \in \mathbb{N},\ b_m(x) = b_0(x) x^{\sum_{k=1}^m (2k-1)}$$

On a aussi $\sum_{k=1}^m (2k-1) = 2\left(\sum_{k=1}^m k\right) - m = m(m+1) - m = m^2$ et finalement

$$\forall m \in \mathbb{N},\ b_m(x) = b_0(x) x^{(m^2)}$$

La propriété de "parité" vue en début de question donne alors

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ b_m(x) = b_0(x) x^{(m^2)}$$

Q.13. Fixons $x \in]-1,1[$ et $z \in \mathbb{C}^*$. L'inégalité (1) donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\prod_{k=1}^{n}(1+z^2x^{2k-1})-1\right| \leq \prod_{k=1}^{n}(1+|z^2x^{2k-1}|)-1$$

On montre comme en question 3 que les produits infinis convergent et on peut passer à la limite $n \to +\infty$ pour obtenir

$$|H(x,z)-1| \leq \prod_{k=1}^{\infty}(1+|z^2x^{2k-1}|)-1$$

On travaille alors exactement comme en question 6 pour justifier l'interversion entre la limite $x \to 1$ et le produit du membre de droite. Ce membre de droite est de limite nulle et on a donc

$$\lim_{x\to 0} H(x,z) = 1$$

Q.14. On a en particulier $F(x,1) = H(x,1)^2 \to 1$ quand $x \to 0$. Or,

$$\forall x \in]-1,1[,\ F(x,1) = b_0(x)\sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} = b_0(x)(1+2\sum_{m=1}^{\infty} x^{m^2})$$

La somme dans le membre de droite est une somme de série entière et est donc une fonction C^∞ de x sur $]-1,1[$. Elle est, en particulier, continue en 0 et tend vers 0 (sa valeur en 0) quand $x \to 0$. On a finalement

$$\lim_{x\to 0} b_0(x) = 1$$

Q.15. Formellement, on a

$$\begin{aligned}
P(x,\eta) &= \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k})\prod_{k=1}^{\infty}(1+ix^{2k-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-ix^{2k-1}) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k})\prod_{k=1}^{\infty}(1+x^{4k-2}) \ \ \text{regrouper les deux derniers produits} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{4k})\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{4k-2})\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{4k-2}) \ \ \text{scinder le premier produit}
\end{aligned}$$

La justification des égalités avec des produits infinis se fait en réalité en revenant à des produits finis puis en passant à la limite comme à la question 7.

Q.16. De la même façon (et en continuant)

$$\begin{aligned}
P(x,\eta) &= \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{4k})\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{8k-4}) \ \ \text{regrouper les deux derniers produits} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{8k})\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{8k-4})\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{8k-4}) \ \ \text{scinder le premier produit} \\
&= P(x^4,i)
\end{aligned}$$

Q.17. En utilisant l'expression de $F(x,z)$ avec les b_k et la valeur de ceux-ci, on a aussi

$$P(x,z) = Q(x)b_0(x)\sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2}z^{2m}$$

L'égalité de la question précédente donne ainsi

$$c_0(x)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^p x^{4p^2}+ic_0(x)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^p x^{(2p+1)^2}=c_0(x^4)\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^p x^{4p^2}$$

égalité valable pour tout $x\in]-1,1[$.
c_0 étant à valeurs complexes, il n'est pas encore possible de conclure en identifiant les parties réelle et imaginaire. Il nous faut d'abord justifier que pour tout $x\in]-1,1[$ on a $c_0(x)\in\mathbb{R}$ ou encore que $b_0(x)\in\mathbb{R}$.
On rappelle que

$$\forall x\in]-1,1[,\ \forall z\in\mathbb{C}^*,\ F(x,z)=b_0(x)\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{m^2}z^m$$

- Si $x\in[0,1[$, on choisit $z=1$. On a $F(x,1)\in\mathbb{R}$ (définition de F) et donc

$$b_0(x)(1+2\sum_{m=1}^{\infty}x^{m^2})\in\mathbb{R}$$

  Comme $1+2\sum_{m=1}^{\infty}x^{m^2}>0$ (et donc $\neq 0$) on a donc $b_0(x)\in\mathbb{R}$.
- Si $x\in]-1,0[$, on conclut de même en considérant $z=-1$.

On peut maintenant conclure que

$$\forall x\in]-1,1[,\ c_0(x)=c_0(x^4)$$

Q.18. En itérant la formule de la question précédente on obtient

$$\forall x\in]-1,1[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ c_0(x)=c_0(x^{(4^n)})$$

ce qui se prouve de manière immédiate par récurrence. x étant fixé dans $]-1,1[$, $(x^{(4^n)})$ est de limite nulle quand $n\to+\infty$. Comme c_0 tend vers 1 en 0 (c'est le cas pour Q et b_0), le théorème de composition des limites donne

$$\forall x\in]-1,1[,\ c_0(x)=1$$

On en déduit (avec l'expression de $P(x,z)$ donnée en question 17) que

$$P(x,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{m^2}z^{2m}$$

En revenant à l'expression de définition de P, on a finalement

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^{2k})\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^2x^{2k-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{-2}x^{2k-1})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x^{m^2}z^{2m}$$

3 Le nombre de partitions d'un entier.

Q.19. Soit $t\in]0,1[$; $x=t^{3/2}\in]0,1[$ et $-\sqrt{t}\neq 0$ admet une racine carrée complexe $z\neq 0$ (qui vérifie donc $z^2-t^{1/2}$). En appliquant la formule du triple produit avec ces x et z obtient

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-t^{3m})\prod_{m=1}^{\infty}(1-t^{3m-1})\prod_{m=1}^{\infty}(1-t^{3m-2})=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m t^{(3m^2+m)/2}$$

et il suffit de regrouper les produit (c'est le sens où cela ne pose pas de problème) pour en déduire la formule (7).

Q.20. Montrons que f réalise une bijection de S_2 dans S_1.

- Supposons $(q_1,\dots,q_n)\in S_2$ et posons $(r_1,\dots,r_n)=f(q_1,\dots,q_n)$. On a alors

$$\sum_{i=1}^n r_j=\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=j}^n q_i\right)$$

On intervertit les deux sommes ($\{(i,j)/\ j\in[1,n],\ i\in[j,n]\}=\{(i,j)/\ i\in[1,n],\ j\in[1,i]\}$) pour obtenir

$$\sum_{i=1}^n r_j=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^i q_i\right)=\sum_{i=1}^n(iq_i)=n$$

De plus, les r_i sont dans $\mathbb{N}$ et vérifient $r_j-r_{j+1}=q_j\geq 0$ pour $j=1,n-1$ et donc $(r_1,\dots,r_n)\in S_1$. f envoie donc un élément de S_2 sur un élément de S_1.

- Soit $(r_1,\dots,r_n)\in S_1$; si $f(q_1,\dots,q_n)=(r_1,\dots,r_n)$ alors $\forall j,\ r_j=\sum_{j=i}^n q_j$ et donc

$$r_n=q_n\ \text{ et }\ \forall i\in[1,n-1],\ r_j-r_{j+1}=q_j$$

On a donc au plus un antécédent pour $(r_1,\dots,r_n)$ par f. Réciproquement, si on pose $(q_1,\dots,q_n)$ comme ci-dessus on a (télescopage)

$$\forall i\in[1,n],\ \sum_{j=i}^n q_j=\sum_{j=i}^{n-1}(r_j-r_{j+1})+r_n=r_j$$

et $f(q_1,\dots,q_n)=(r_1,\dots,r_n)$ (les q_j sont bien des éléments de n puisque les r_i sont ordonnés). Enfin

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n jq_j &= nr_n+\sum_{j=1}^{n-1}j(r_j-r_{j+1})\\
&= nr_n+\sum_{j=1}^{n-1}jr_j-\sum_{j=1}^{n-1}jr_{j+1}\\
&= nr_n+\sum_{j=1}^{n-1}jr_j-\sum_{j=2}^{n}(j-1)r_j\\
&= nr_n+r_1+\sum_{j=2}^{n-1}r_j-(n-1)r_n\\
&= \sum_{j=2}^{n-1}r_j=n
\end{aligned}$$

et $(q_1,\dots,q_n)\in S_2$.

Deux ensembles en bijection ayant même cardinal, on a prouvé que

$$\mathrm{card}(S_1)=\mathrm{Card}(S_2)$$

Q.21. Quand on développe le produit proposé, on obtient $n(n+1)$ termes du type $t_{i_1}t_{2i_2}\dots t_{ni_n}=t^{\sum_{k=1}^n ki_k}$ où chaque i_j est choisi entre 0 et n. Notre produit est la somme de tous les termes de ce type. Parmi ces $n(n+1)$ termes, il y en a autant égaux à t^n que de choix des i_k entre 0 et n tels que $\sum_{k=1}^n ki_k=n$. La contrainte $i_k\leq n$ n'en est pas une car dans l'équation (9), les q_j sont nécessairements $\leq n$ (on ne retranche donc pas de solutions en imposant $q_j\leq n$). Il y a donc $\mathrm{card}(S_2)=\mathrm{card}(S_1)=p(n)$ termes égaux à t^n et $p(n)$ est donc le coefficient de t^n dans le développement proposé.

Q.22. Avertissement : je n'ai pas réussi à traiter simplement cette question. De plus, je vais me limiter à des valeurs $t \in [0, 1/2[$ pour des raisons qui apparaissent plus bas.

Soit $t \in [0,1[$; on a $\prod_{m=1}^{n}(1-t^m) = \exp\left(\sum_{m=1}^{n}\ln(1-t^m)\right)$. Le terme dans l'exponentielle est la somme partielle d'une série aboslument convergente ($\ln(1-t^m) \sim t^m$) et converge vers une limite réelle ℓ. Par continuité de l'expontielle, on a donc $\prod_{m=1}^{n}(1-t^m) \to e^\ell \neq 0$. On peut donc passer à l'inverse pour obtenir la convergence de la suite de terme général $\prod_{m=1}^{n}\frac{1}{1-t^m} = \frac{1}{\prod_{m=1}^{n}(1-t^m)}$.

La formule d'Euler (7) peut ainsi s'écrire (j'ai justifié, en particulier, l'existence des quantités écrites)

$$\forall t \in [0,1[,\ \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-t^m}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m t^{(3m^2+m)/2} = 1$$

En utilisant alors la formule sur la somme d'une série géométrique, on conclut que

$$\forall t \in [0,1[,\ \left(\prod_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}t^{im}\right)\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m t^{(3m^2+m)/2}\right) = 1$$

Par définition, on a

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty}t^{im}\right) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\infty}t^{im}\right)$$

D'après le théorème sur les produits de Cauchy de séries entières, on peut affirmer que

$$\forall n \geq 2,\ \forall t \in]-1,1[,\ \prod_{m=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{\infty}t^{im}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(n)t^k \qquad (*)$$

où $\alpha(n) = u(1) * u(2) * \cdots * u(n)$ ($*$ désignant le produit de Cauchy) et $u_k(m) = 1$ si k est multiple de m et 0 sinon (de sorte que $\sum_{k=0}^{\infty}u_k(m)t^k = \sum_{i=0}^{\infty}t^{im}$).

Fixons $k \in \mathbb{N}$ et intéressons nous à la suite $(\alpha_k(n))_{n\geq 2}$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_k(n) = \sum_{i_1+\cdots+i_n=k}u_{i_1}(1)\dots u_{i_n}(n)$$

Si $n \geq k$, on montre comme à la question précédente que ce terme vaut exactement $p(k)$. Notre suite $(\alpha_k(n))_{n\geq 2}$ est donc constante à partir du rang k et converge vers $p(k)$:

$$\forall k \geq 0,\ \lim_{n\to+\infty}\alpha_k(n) = p(k)$$

Remarque : en réalité, il faut mettre le cas $k = 0$ à part. Dans ce cas, $\alpha_0(n) = 1$ pour tout n. On simplifie la rédaction en posant $p(0) = 1$.

On peut maintenant essayer de passer à la limite $n \to +\infty$ dans $(*)$. On a envie d'utilise le théorème de double limite pour le membre de droite. Ici $t \in [0,1[$ est fixé.

- On vient de voir que $\forall k \in \mathbb{N},\ \alpha_k(n)t^k \to p(k)t^k$ quand $n \to +\infty$.
- On a $\forall n \geq 2,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |\alpha_k(n)t^k| \leq p(k)t^k$ (la suite $(\alpha_k(n))_{n\geq 2}$ est croissante).
  Ainsi $\|n \mapsto \alpha_k(n)t^k\|_\infty \leq p(k)t^k$. Il nous reste à voir si $\sum(p(k)t^k)$ converge. Je prétends que $p(k) \leq 2^{k-1}$ et je le prouve par récurrence.
  - C'est vrai pour $k = 1$.
  - Soit $k \geq 2$ tel que le résultat soit vrai aux rangs $1, \dots, k-1$. On a

$$p(k) \leq 1 + \sum_{j=1}^{k-1}p(k-j)$$

    Le terme 1 correspond au cas où $r_1 = k$; le terme $p(k-j)$ correspond à un majorant dans le cas $r_1 = j$. Comme $p(k-j) \leq 2^{k-j-1}$ par hypothèse de récurrence pour tout $j = 1..k-1$, on obtient $p(k) \leq 2^{k-1}$ en explicitant la suite géométrique qui apparaît.

Quand $t \in [0,1/2[$, $0 \leq p(k)t^k \leq (t/2)^k$ est le terme général d'une série convergente. On peut ainsi appliquer le théorème de double limite pour conclure que

$$\forall t \in [0,1/2[,\ \left(1+\sum_{k=1}^{\infty} p(k)t^k\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m t^{(3m^2+m)/2}\right) = 1$$

Q.23. Quand on effectue formellement le produit dans l'expression ci-dessus (et on admettra, comme dans le produit de Cauchy, que c'est possible quand notre identité a lieu $\forall t \in [0,1/2[$) et si on ne s'intéresse qu'aux puissances ≤ 7, on peut se contenter de travailler pour $k \leq 7$ et $|m| \leq 2$. La partie de degré ≤ 7 vaut alors

$$1+(p(1)-1)t+(p(2)-p(1)-1)t^2+(p(3)-p(2)-p(1))t^3+(p(4)-p(2)-p(3))t^4$$

$$+(p(5)-p(4)-p(3)+1)t^5+(p(6)-p(5)-p(4)+p(1))t^6+(p(7)-p(6)-p(5)+p(2)+1)t^7$$

Les coefficients de t^k pour $k \geq 1$ devant être nuls, on obtient un système dont lé résolution donne

$$p(1)=1,\ p(2)=2,\ p(3)=3,\ p(4)=5,\ p(5)=7,\ p(6)=11,\ p(7)=15$$