Mines PSI 2
Course poursuite

1 Généralités.

1. $\phi(.,x_0) - \lambda$ est une fonction continue et qui ne s'annule pas sur l'intervalle $[0,T(x_0)[$. Par théorème des valeurs intermédiaires, elle est de signe constant sur cet intervalle. Or, elle vaut $x_0 > 0$ en 0. Ainsi

$$\forall t \in [0,T(x_0)[,\ \phi(t,x_0) > \lambda(t)$$

D'après $E(\lambda)$, la dérivée de $\phi(.,x_0)$ est alors strictement positive sur $[0,T(x_0)[$ et $\phi(.,x_0)$ est strictement croissante sur cet intervalle. Par théorème de limite monotone, elle admet donc une limite éventuellement infinie en $T(x_0)$.

2. Si, par l'absurde, $\phi(t,x_0) \to +\infty$ quand $t \to T(x_0)$ alors $\phi(t,x_0) - \lambda(t) \to +\infty$ aussi (λ est continue en $T(x_0)$) et donc $\phi'(t,x_0) \to 0$. $\phi'(.,x_0)$ est continue sur $[0,T(x_0)[$ et admet une limite finie en $T(x_0)$; c'est donc une fonction bornée sur l'intervalle $[0,T(x_0)[$. Notons M un réel tel que $\forall t \in [0,T(x_0)[,\ |\phi'(t,x_0)| \leq M$. On a alors

$$\forall t \in [0,T(x_0)[,\ |\phi(t,x_0)| = \left| x_0 + \int_0^t \phi'(u,x_0)\, du \right| \leq |x_0| + \int_0^t |\phi'(u,x_0)|\, du \leq x_0 + T(x_0)M$$

et $\phi(.,x_0)$ est aussi bornée sur $[0,T(x_0)[$ ce qui contredit l'hypothèse initiale. D'après la question précédente, $\phi(.,x_0)$ admet donc une limite finie en $T(x_0)$:

$$T(x_0) < +\infty \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{R} / \lim_{t \to T(x_0)^-} \phi(t,x_0) = \ell$$

3. Par croissance de $\phi(.,x_0)$, on a alors $\forall t \in [0,T(x_0)[,\ \phi(t,x_0) \leq \ell$ et donc (question **1.**) $\lambda(t) < \ell$. En passant à la limite $t \to T(x_0)^-$, la continuité de λ donne

$$\lambda(T(x_0)) \leq \ell$$

Si, par l'absurde, cette inégalité est stricte alors $\phi'(t,x_0) \to \frac{2}{\ell - \lambda(T(x_0))}$ quand $t \to T(x_0)^-$. Par un corollaire des accroissements finis, le prolongement par continuité de $\phi(.,x_0)$ (par $\phi(T(x_0),x_0) = \ell$ et que l'on continue à noter $\phi(.,x_0)$) est dérivable en $T(x_0)$ avec $\phi'(T(x_0),x_0) = \frac{2}{\ell - \lambda(T(x_0))}$ et de plus $\phi(.,x_0)$ est à dérivée continue en $T(x_0)$. On a ainsi $\phi(.,x_0) \in \mathcal{C}^1([0,T(x_0)])$ (et c'est une solution de $E(\lambda)$ sur le segment).
Par ailleurs, le théorème 1 appliqué avec $y_0 = \ell$ et $t_0 = T(x_0)$ donne l'existence de $\varepsilon > 0$ et d'une solution ψ de $E(\lambda)$ sur $]T(x_0) - \varepsilon, T(x_0) + \varepsilon[$ telle que $\psi(T(x_0)) = \ell$. Soit θ la fonction définie par

$$\forall t \in [0,T(x_0)[,\ \theta(t) = \phi(t,x_0) \ \text{ et } \ \forall t \in [T(x_0), T(x_0)+\varepsilon[,\ \theta(t) = \psi(t)$$

θ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,T(x_0)+\varepsilon[$ (le seul problème est en $T(x_0)$ où θ est continue et dérivable à droite et gauche avec le même nombre dérivé à droite et gauche égal à $\frac{2}{\ell - \lambda(T(x_0))}$). Elle est solution de $E(\lambda)$ sur $[0,T(x_0)+\varepsilon[$ et prolonge $\phi(.,x_0)$ ce qui contredit le caractère maximal de cette dernière solution.
On a donc prouvé que

$$T(x_0) < +\infty \Rightarrow \lim_{t \to T(x_0)^-} \phi(t,x_0) = \lambda(T(x_0))$$

4. On suppose $0 < x_0 < y_0$ et, par l'absurde, qu'il existe t_1 tel que $\phi(t_1,x_0) = \phi(t_1,y_0)$. D'après le théorème 1 (second point) les fonctions $\phi(.,x_0)$ et $\phi(.,y_0)$ sont égales sur $[0, \min(T(x_0),T(y_0))[$. Elles le sont, en particulier, en 0 ce qui contredit $x_0 \neq y_0$. On a donc montré que

$$0 < x_0 < y_0 \Rightarrow \forall t \in [0, \min(T(x_0),T(y_0))[,\ \phi(t,x_0) \neq \phi(t,y_0)$$

La fonction $\phi(.,x_0)-\phi(.,y_0)$ est continue sur $[0,\min(T(x_0),T(y_0))[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle. Par théorème des valeurs intermédiaires, elle est de signe constant sur celui-ci. En 0, elle est négative et on a donc

$$0<x_0<y_0 \Rightarrow \forall t\in[0,\min(T(x_0),T(y_0))[,\ \phi(t,x_0)<\phi(t,y_0)$$

5. On suppose que $0<x_0<y_0$ et, par l'absurde, que $T(x_0)>T(y_0)$. On a donc $T(y_0)<+\infty$ ce qui montre que $\phi(t,y_0)\to\lambda(T(y_0))$ quand $t\to T(y_0)^-$ (question **3.**). En passant à la limite dans la relation de la question **4.** on a alors $\phi(T(y_0),x_0)\le\lambda(T(y_0))$ ce qui contredit le résultat de la question **1.** ($\forall t<T(x_0),\ \phi(t,x_0)>\lambda(t)$). On a ainsi montré que

$$0<x_0<y_0\Rightarrow T(x_0)\le T(y_0)$$

2 Etude de deux exemples.

6. Soit x la solution maximale de $E(\lambda_0,x_0)$. D'après la question **1.**, $\forall t\in[0,T(x_0)[,\ x(t)>0$. L'équation donne en outre $(x^2)'(t)=4$ et, en intégrant cette relation et compte-tenu de la positivité de x,

$$\forall t\in[0,T(x_0)[,\ x(t)=\sqrt{x_0^2+4t}$$

On vérifie réciproquement (c'est la seule partie utile du raisonnement) que $t\mapsto\sqrt{x_0^2+4t}$ est solution de $E(\lambda_0,x_0)$ sur $\mathbb{R}^+$. C'est la solution maximale et on a $T(x_0)=+\infty$ et donc pas capture.

7. On note (en choisissant $a=4$)

$$\forall t\in[0,1[,\ \phi_0(t)=4-2\sqrt{1-t}$$

ϕ_0 est dérivable sur $[0,1[$ et

$$\forall t\in[0,1[,\ \phi_0'(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t}}=\frac{2}{\phi_0(t)-\lambda_1(t)}$$

Comme $\phi_0(0)=2$, ϕ_0 est solution de $E(\lambda_1,2)$ sur $[0,1[$.
ϕ_0' est de limite infinie en 1^- et on ne peut donc prolonger ϕ_0 à 1 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. A fortiori, on ne peut prolonger ϕ à un sur-intervalle de $[0,1[$ en une fonction solution de $E(\lambda_1,2)$. On a donc la solution maximale et

$$T(2)=1$$

8. Un simple calcul donne

$$\frac{d}{dt}(\ln(|\phi(t)-\phi_0(t)|)=\frac{\phi'(t)-\phi_0'(t)}{\phi(t)-\phi_0(t)}=\frac{1}{-(\phi(t)-\lambda_1(t))\sqrt{1-t}}$$

9. D'après la question **4.**

$$\text{si }\ x_0<2,\ \forall t\in[0,\min(1,T(x_0))[,\ \phi(t)=\phi(t,x_0)\le\phi(t,2)=\phi_0(t)$$

$$\text{si }\ x_0>2,\ \forall t\in[0,\min(1,T(x_0))[,\ \phi_0(t)=\phi(t,2)\le\phi(t,x_0)=\phi(t)$$

Dans tous les cas, la fonction $C\ :\ t\mapsto\ln(|\phi(t)-\phi_0(t)|)-\frac{2\sqrt{1-t}}{\phi(t)-\phi_0(t)}$ est bien définie sur $[0,\min(1,T(x_0))[$. On remarque que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2\sqrt{1-t}}{\phi(t)-\phi_0(t)}\right)=-\frac{1}{\sqrt{1-t}(\phi(t)-\phi_0(t))}-\frac{2\sqrt{1-t}}{(\phi(t)-\phi_0(t))^2}(\phi'(t)-\phi_0'(t))$$

Le calcul de la question précédente permet de simplifier l'expression en

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{2\sqrt{1-t}}{\phi(t)-\phi_0(t)}\right) &= \frac{1}{\phi(t)-\phi_0(t)}\left(\frac{2}{\phi(t)-\lambda_1(t)}-\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right) \\
&= \frac{1}{\phi(t)-\phi_0(t)}\,\frac{2\sqrt{1-t}+\lambda_1(t)-\phi(t)}{(\phi(t)-\lambda_1(t))\sqrt{1-t}} \\
&= \frac{1}{(\phi(t)-\lambda_1(t))\sqrt{1-t}}
\end{aligned}$$

On en déduit que C' est nulle sur l'intervalle $[0, \min(1, T(x_0))[$ et que C est donc constante sur cet intervalle.

10. On suppose $x_0 < 2$ et on a donc (question **4.** et **5.**) $T(x_0) \leq T(2) = 1$ et

$$\forall t \in [0, T(x_0)[,\ \ \phi(t) < \phi_0(t)$$

On en déduit alors que $C(0) = \ln(2-x_0) - \frac{2}{x_0-2}$. L'étude de cette fonction de x_0 montrer qu'elle croît sur $]0, 2[$. Elle est donc supérieure à sa valeur en 0 ce qui donne

$$C(0) \geq 1 + \ln(2)$$

On suppose, par l'absurde, que $T(x_0) < 1$. D'après la question **3.**, $\phi(t)$ tend vers $\lambda_1(T(x_0))$ quand $t \to T(x_0)^-$. On en déduit alors que

$$\lim_{t\to T(x_0)^-} C(t) = \ln(2\sqrt{1-T(x_0)}) + 1 = \ln(2) + 1 + \frac{1}{2}\ln(1-T(x_0))$$

D'après la question précédente, cette quantité est plus grande que $\ln(2)+1$ et on en déduit que $1 - T(x_0) \geq 1$ ce qui contredit $T(x_0) > 0$. On a ainsi prouvé que

$$T(x_0) = 1$$

11. On suppose $x_0 > 2$ et on a donc (question **4.** et **5.**)

$$T(x_0) \geq T(2) = 1 \ \text{ et } \ \forall t \in [0, 1[,\ \ \phi_0(t) < \phi(t)$$

Si, par l'absurde, $T(x_0) = 1$ alors, avec la question **3.** on a ϕ et ϕ_0 qui tendent toutes deux vers $\lambda_1(1) = 4$ en 1^-. Comme $\phi > \phi_0$, la différence $\phi - \phi_0$ tend vers 0^+ en 1^- et donc $C(t) \to -\infty$ quand $t \to 1^-$, ce qui contredit le caractère constant de C sur $[0, 1[$. Ainsi, on a prouvé que

$$T(x_0) > 1$$

On a alors

$$\forall t \in [1, T(x_0)[,\ \ \phi'(t) = \frac{2}{\phi(t)-4}$$

En intégrant la relation $(\phi(u) - 4)\phi'(u) = 2$ entre 1 et t on a donc

$$\forall t \in [1, T(x_0)[,\ \ (\phi(t)-4)^2 = (\phi(1)-4)^2 + 4(t-1)$$

Si, par l'absurde, $T(x_0) < +\infty$ alors $\phi(t) \to \lambda(T(x_0)) = 4$ quand $t \to T(x_0)^-$ (question **3.**) et donc $(\phi(1) - 4)^2 + 4(T(x_0) - 1) = 0$ ce qui est impossible (l'un des termes est ≥ 0 et l'autre est > 0). On a donc montré que

$$T(x_0) = +\infty$$

3 Une condition suffisante pour qu'il n'y ait pas de capture.

12. On a $|\lambda_1(1-s)-\lambda_1(1-t)| = 4(\sqrt{t}-\sqrt{s}) = \frac{4(t-s)}{\sqrt{t}+\sqrt{s}}$ et donc

$$\frac{|\lambda_1(1-s)-\lambda_1(1-t)|}{\sqrt{t-s}} = \frac{F(s/t)}{1+\sqrt{s/t}} \quad \text{avec} \quad F(u) = 4\sqrt{1-u}$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $0 < x < y$. Trois cas sont possible.
- $0 < x < y \leq 1$ et alors $\frac{|\lambda_1(x)-\lambda_1(y)|}{\sqrt{y-x}} = \frac{F((1-y)/(1-x))}{1+\sqrt{(1-y)/(1-x)}} \leq F((1-y)/(1-x)) \leq 4$.
- $0 < x \leq 1 < y$ et alors $\frac{|\lambda_1(x)-\lambda_1(y)|}{\sqrt{y-x}} = \frac{4\sqrt{1-x}}{\sqrt{y-x}} \leq 4$.
- $1 < x < y$ et alors $\frac{|\lambda_1(x)-\lambda_1(y)|}{\sqrt{y-x}} = 0 \leq 4$.

Le quotient est toujours plus petit que 4 et donc $M(\lambda_1) \leq 4$. Le quotient est égal à 1 pour $x = 1/2$ et $y = 1$ (par exemple) et le majorant trouvé est atteint. On a donc

$$M(\lambda_1) = 4 = \max_{0<x<y} \frac{|\lambda_1(x)-\lambda_1(y)|}{\sqrt{y-x}}$$

13. Si, par l'absurde, $M(\lambda) = 0$ alors

$$\forall 0 < x < y, \ \frac{|\lambda(x)-\lambda(y)|}{\sqrt{y-x}} \leq 0$$

et donc λ est une fonction constante et comme $\lambda(0) = 0$, c'est la fonction nulle. La question **6** indique alors que $T(x_0) = +\infty$ ce qui est excus. Ainsi

$$M(\lambda) > 0$$

14. Posons $\hat{x}\ :\ t \mapsto \frac{1}{r}x(bt)$. C'est une fonction de classe C^1 sur $[0, T(x_0)/b[$ et

$$\forall t \in [0, T(x_0)/b[, \ \hat{x}'(t) = \frac{b}{r}x'(bt) = \frac{2b/r}{x(bt)-\lambda(bt)} = \frac{2b/r^2}{\hat{x}(t)-\hat{\lambda_r}(bt/r^2)}$$

En prenant $b = r^2$, on obtient que $\hat{x}$ est solution de $E(\hat{\lambda_r}, \frac{1}{r}x_0)$ ($\hat{x}(0) = \frac{1}{r}x(0) = \frac{1}{r}x_0$). C'est une solution maximale (car si on pouvait prolonger $\hat{x}$ par ϕ, on pourrait aussi prolonger x par $t \mapsto r\phi(t/r^2)$) et son temps de vie est $T(x_0)/r^2$. Ce temps de vie vaut 1 si $r = \sqrt{T(x_0)}$. On choisit donc

$$r = \sqrt{T(x_0)} \ \text{ et } \ b = T(x_0)$$

On a alors $\hat{x}$ solution maximale de $E(\hat{\lambda_r}, \frac{1}{r}x_0)$ de temps de vie égal à 1. D'après la question **3.**, $\hat{x}$ est prolongeable par continuité en 1 en posant

$$\hat{x}(1) = \hat{\lambda_r}(1) = \frac{1}{r}\lambda(r^2) = \frac{1}{\sqrt{T(x_0)}}\lambda(T(x_0))$$

15. x étant croissante sur $[0,1]$ (question **1.** et prolongement par continuité en 1 qui conserve la monotonie sur le segment), on a

$$\forall t \in [0,1[, \ x(t)-\lambda(t) \leq x(1)-\lambda(t) = \lambda(1)-\lambda(t) = \frac{\lambda(1)-\lambda(t)}{\sqrt{1-t}}\sqrt{1-t} \leq M(\lambda)\sqrt{1-t}$$

et l'inégalité reste vraie pour $t = 1$. On en déduit que

$$\forall t \in [0,1[, \ x'(t) = \frac{2}{x(t)-\lambda(t)} \geq \frac{2}{M(\lambda)\sqrt{1-t}}$$

En intégrant cette relation entre u et v avec $0 \leq u \leq v < 1$ puis en faisant tendre v vers 1 on obtient

$$\forall u \in [0,1[, \ x(1)-x(u) \geq \frac{4}{M(\lambda)}\sqrt{1-u}$$

16. On a donc

$$\forall t \in [0,1],\ x(t) - \lambda(t) \leq x(1) - \lambda(t) - \frac{4}{M(\lambda)}\sqrt{1-t}$$

En remarquant que $x(1) - \lambda(t) = \frac{\lambda(1)-\lambda(t)}{\sqrt{1-t}}\sqrt{1-t} \leq M(\lambda)\sqrt{1-t}$ on a finalement

$$\forall t \in [0,1],\ x(t) - \lambda(t) \leq (M(\lambda) - \frac{4}{M(\lambda)})\sqrt{1-t}$$

17. On suppose que $\forall t \in [0,1[,\ x(t) - \lambda(t) \leq \mu\sqrt{1-t}$. On a alors

$$\forall t \in [0,1[,\ x'(t) \geq \frac{2}{\mu\sqrt{1-t}}$$

En intégrant entre u et v pour $0 \leq u \leq v < 1$ puis en faisant tendre v vers 1 on a alors

$$\forall u \in [0,1[,\ x(1) - x(u) \geq \frac{4}{\mu}\sqrt{1-u}$$

et ensuite $\forall t \in [0,1[,\ x(t) - \lambda(t) \leq x(t) - x(1) + x(1) - \lambda(t) \leq -\frac{4}{\mu}\sqrt{1-t} + \lambda(1) - \lambda(t)$ et on utilise encore $\lambda(1) - \lambda(t) \leq M(\lambda\sqrt{1-t}$ pour conclure que

$$\forall t \in [0,1[,\ x(t) - \lambda(t) \leq (M(\lambda) - \frac{4}{\mu})\sqrt{1-t}$$

et ceci reste vrai pour $t = 1$. Comme $x - \lambda$ est strictement positive, on en déduit que

$$M(\lambda) - \frac{4}{\mu} > 0$$

18. On prouve par récurrence que pour tout $n \geq 0$, u_n est bien défini, est > 0 et vérifie

$$\forall t \in [0,1],\ x(t) - \lambda(t) \leq u_n\sqrt{1-t}$$

- C'est vrai au rang 0 car $M(\lambda) > 0$ et avec la question **15.**
- Supposons le résultat vrai pour un rang $n \geq 0$. On utilise alors la question **17** pour obtenir le résultat au rang $n+1$.

On a $u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n^2 - M(\lambda)u_n + 4}{u_n}$. Comme $M(\lambda) \in]0,4[$, $X^2 - M(\lambda)X + 4$ est de discriminant < 0 et ce polynôme ne prend que des valeurs positives. La suite (u_n) est donc décroissante. Etant minorée par 0, elle converge. Sa limite ℓ est soit nulle soit solution de $\ell = M(\lambda) - \frac{4}{\ell}$ et ce dernier cas est exclus (car le polynôme $X^2 - M(\lambda)X + 4$ n'a pas de racine réelle). On a ainsi

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

En passant à la limite dans la relation vérifiée lors de la récurrence, on a alors $\forall t,\ x(t) \leq \lambda(t)$ ce qui est faux.
Dans notre raisonnement par l'absurde, on a obtenu une contradiction et

$$T(x_0) = +\infty$$