Mines PSI 1
un corrigé

Remarque préliminaire.

La quantité x^y est a priori définie pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$ comme égale à $\exp(y\ln(x))$. Si $y > 0$, $x^y \to 0$ quand $x \to 0^+$. Si $y > 0$, on prolongera donc $x \mapsto x^y$ par la valeur 0 en 0. On utilise cette convention tout au long du problème (si $y > 0$, $x \mapsto x^y$ est alors définie sur $\mathbb{R}^+$). Dans le cas $y \leq 0$, $x \mapsto x^y$ n'est a priori définie que sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1 Une inégalité de Prékopa et Leindler.

1. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante. ln est donc concave sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall a,b \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(\lambda a + (1-\lambda b) \geq \lambda\ln(a) + (1-\lambda)\ln(b)$$

En composant par la fonction exp, qui croît sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall a,b \in \mathbb{R}^{+*},\ \lambda a + (1-\lambda)b \geq a^\lambda b^{1-\lambda}$$

Quand $\lambda \in]0,1[$, l'inégalité reste vraie si $a = 0$ ou $b = 0$ (avec la remarque préliminaire, le membre de droite est nul et celui de gauche est positif).
Soit $u > 1$. La fonction $x \mapsto x^u = \exp(u\ln(x))$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée seconde $x \mapsto u(u-1)x^{u-2}$. Cette dérivée seconde est positive et $x \mapsto x^u$ est donc convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$. On en déduit que

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall a,b \in \mathbb{R}^{+*},\ (\lambda a + (1-\lambda)b)^u \leq \lambda a^u + (1-\lambda)b^u$$

Si $a = 0$ ou $b = 0$, alors, avec la remarque préliminaire, l'inégalité reste vraie (et est une égalité).

2. La fonction $f\ :\ u \mapsto 1 + u^\lambda - (1+u)^\lambda$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(u) = \lambda(u^{\lambda-1} - (1+u)^{\lambda-1})$. Comme $\lambda < 1$, $x \mapsto x^{\lambda-1}$ décroît sur $\mathbb{R}^{+*}$ et f' est donc positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. f est ainsi croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa limite en 0^+ étant nulle, on a donc

$$\forall u > 0,\ (1+u)^\lambda \leq 1 + u^\lambda$$

En particulier, on a

$$\forall a,b \in \mathbb{R}^{+*},\ (a+b)^\lambda = a^\lambda(1 + (b/a)^\lambda) \leq a^\lambda(1 + (b/a)^\lambda) = a^\lambda + b^\lambda$$

Si a ou b est nul, l'inégalité reste valable et est une égalité.

3. Soit $\tilde{f}\ :\ y \mapsto \int_{-\infty}^y f(x)\,dx$. On a

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \tilde{f}(y) = \tilde{f}(0) + \int_0^y f(x)\,dx$$

f étant continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on peut alors appliquer le théorème fondamental pour obtenir que $\tilde{f}$ est une primitive de f. $\tilde{f}$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (dérivée f strictement positive) et continue sur $\mathbb{R}$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{-\infty}\tilde{f}, \lim_{+\infty}\tilde{f}[=]0,F[$ ce qui indique que

$$\forall z \in]0,F[,\ \exists!y \in \mathbb{R}/\ \tilde{f}(z) = y$$

Pour $t \in]0,1[$, on en déduit alors l'existence et l'unicité de $u(t)$ vérifiant $\tilde{f}(u(t)) = Ft$ et on a même

$$\forall t \in]0,1[,\ u(t) = (\tilde{f})^{-1}(Ft)$$

On procède de la même façon pour obtenir la fonction v (g vérifie les mêmes hypothèses que f).

4. Comme $\tilde{f}'(x) = f(x) \neq 0$, le théorème sur les bijections réciproques indique que $(\tilde{f})^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par théorèmes généraux, on a donc

$$u \in \mathcal{C}^1(]0,1[)$$

Par définition, on a

$$\forall t \in]0,1[,\ \tilde{f}(u(t)) = Ft$$

et en dérivant cette relation, on en déduit que

$$\forall t \in]0,1[,\ u'(t)f(u(t)) = F$$

On a de même

$$\forall t \in]0,1[,\ v'(t)g(v(t)) = G$$

5. Avec la question **3.**, u et w sont des bijections strictement croissantes de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$. Elle tendent donc vers $-\infty$ en 0^+ et vers $+\infty$ en 1^-.
$w = \lambda u + (1-\lambda)v$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, strictement croissante sur $]0,1[$ (somme de telles fonctions). Elle réalise une bijection de $]0,1[$ dans $]\lim_{-\infty} w, \lim_{+\infty} w[= \mathbb{R}$. Plus précisément, c'est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ puisque w' ne s'annule pas ($w'(x) = \lambda u'(x) + (1-\lambda)v'(x) > 0$). w définit donc un changement de variable. En posant $t = w^{-1}(x)$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\ dx = \int_0^1 h(w(t))w'(t)\ dt$$

On remarque alors que (en utilisant les expressions de $u'(t)$ et $v'(t)$)

$$h(w(t))w'(t) = h(\lambda u(t) + (1-\lambda)v(t))\left(\lambda\frac{F}{f(u(t))} + (1-\lambda)\frac{G}{g(v(t)}\right)$$

En utilisant l'inégalité vérifiée par f, g, h (la parenthèse est, elle, positive et ne change pas le sens des inégalités) on a alors

$$h(w(t))w'(t) \geq \lambda a + (1-\lambda)b \ \text{ avec } \ a = F\left(\frac{f(u(t))}{g(v(t))}\right)^{\lambda-1},\ b = G\left(\frac{f(u(t))}{g(v(t))}\right)^{\lambda}$$

On se sert alors de la question **1.** pour en déduire que

$$h(w(t))w'(t) \geq a^\lambda b^{1-\lambda} = F^\lambda G^{1-\lambda}$$

Il reste à intégrer entre 0 et 1 pour obtenir l'inégalité "P-L" :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\ dx \geq F^\lambda G^{1-\lambda} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\ dx\right)^{1-\lambda}$$

6. D'après la question **1** utilisée avec $u = 2$, $a = |x|$ et $b = |y|$, on a $(\lambda|x| + (1-\lambda)|y|)^2 \leq \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2$. Par ailleurs, l'inégalité triangulaire donne $|\lambda x + (1-\lambda)y| \leq \lambda|x| + (1-\lambda)|y|$. On peut élever cette inégalité au carré (opération croissante sur $\mathbb{R}^+$) et utiliser le premier résultat pour obtenir alors

$$(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \leq x^2 + (1-\lambda)y^2$$

Reste à utiliser la décroissance de $t \mapsto e^{-t}$ et la propriété de morphisme de l'exponentielle pour conclure que

$$\Psi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \Psi(x)^\lambda \Psi(y)^{1-\lambda}$$

7. On suppose que $|y| \leq M$ et on distingue trois cas.
- Si $|z| \leq \hat{M}$ alors $\Psi(x) = e^{-x^2} \leq 1 = \Psi_M(z)$.

- Si $z > \hat{M}$ alors tout d'abord ceci s'écrit $x \geq \frac{\hat{M}-(1-\lambda)y}{\lambda}$ et comme $(1-\lambda)y \leq (1-\lambda)|y| \leq (1-\lambda)M \leq \hat{M}$ on a donc $x \geq 0$. On a alors

$$|z| = \lambda x + (1-\lambda)y \leq \Theta x + (1-\lambda)M \leq \Theta x + \hat{M}$$

c'est à dire $x \geq \frac{|z|-\hat{M}}{\Theta} \geq 0$. En élevant au carré et en composant par $t \mapsto e^{-t}$ on obtient

$$\Psi(x) \leq \exp(-\frac{(|z|-\hat{M})^2}{\Theta^2}) = \Psi_M(z)$$

- Si $z < -\hat{M}$ on a de même $x \leq 0$ puis $-\lambda x \leq -\Theta x$ (car $-x \geq 0$) et $-(1-\lambda)y - \hat{M} \leq 0$ ce qui donne $-x \geq \frac{-z-\hat{M}}{2} = \frac{|z|-\hat{M}}{2} \geq 0$. On conclut encore de la même façon...

On vient de prouver que

$$|y| \leq M \Rightarrow \Psi(x) \leq \Psi_M(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

En changeant λ en $1-\lambda$ et en permutant les rôles de x et y, on a aussi

$$|x| \leq M \Rightarrow \Psi(y) \leq \Psi_M(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

8. Avec la question **2.** (appliquée avec λ ou $1-\lambda$) on a

$$0 \leq (f(x) + \varepsilon\Psi(x))^\lambda \leq f(x)^\lambda + \varepsilon^\lambda \Psi(x)^\lambda$$

$$0 \leq (g(y) + \varepsilon\Psi(y))^{1-\lambda} \leq g(y)^{1-\lambda} + \varepsilon^{1-\lambda}\Psi(y)^{1-\lambda}$$

On peut faire le produit de ces inégalités entre nombres positifs. On voit apparaître quatre produits.
- Le terme $f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$ qui est par hypothèse inférieur à $h(z)$.
- Le terme $\varepsilon\Psi(x)^\lambda\Psi(y)^{1-\lambda}$ qui est inférieur à $\varepsilon\Psi(z)$ d'après la question **6.**
- Le terme $\varepsilon^\lambda\Psi(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$. Ce terme est nul si $|y| > M$. Sinon, il est inférieur, avec la question **7.**, à $\varepsilon^\lambda\Psi_M(z)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$ (l'élévation à la puissance λ est une opération croissante) et donc aussi à $\varepsilon^\Lambda\Psi_M(z)^\Lambda\|g\|_\infty^{1-\lambda}$ (car ε et $\Psi_M(z)$ sont dans $]0,1[$, plus on les élève à une puissance petite, plus on obtient un terme grand). Ce dernier majorant est donc valable dans tous les cas.
- Le terme $\varepsilon^{1-\lambda}\Psi(y)^\lambda f(x)^\lambda$ qui est de la même façon inférieur à $\varepsilon^\Lambda\Psi_M(z)^\Lambda\|f\|_\infty^\lambda$

On obtient finalement

$$f_\varepsilon(x)^\lambda g_\varepsilon(y)^{1-\lambda} \leq h(z) + \varepsilon^\Lambda(\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda})\Psi_M(z)^\Lambda + \varepsilon\Psi(z)$$

9. Notons h_ε la fonction définie par

$$h_\varepsilon(z) = h(z) + \varepsilon^\Lambda(\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda})\Psi_M(z)^\Lambda + \varepsilon\Psi(z)$$

On a donc, d'après la question précédente,

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f_\varepsilon(x)g_\varepsilon(y) \leq h_\varepsilon(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

f_ε et g_ε sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et h_ε est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$. Ce sont aussi des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ car f, g, h, Ψ et Ψ_M^Λ le sont (pour ces deux dernières, ce sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dominée par $x \mapsto 1/x^2$ aux voisinages des infinis). On peut leur appliquer "P-L" :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)\,dx \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x)\,dx\right)^{1-\lambda}$$

Il s'agit maintenant de faire tendre ε vers 0. On remarque que

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx\right| \le \varepsilon^\Lambda(\|f\|_\infty^\lambda + \|g\|_\infty^{1-\lambda})\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_M^\Lambda + \varepsilon\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi$$

Le majorant tend vers 0 quand ε tend vers 0 et donc

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} h_\varepsilon(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$$

On montre de même que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \quad\text{et}\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} g_\varepsilon(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$$

ce qui permet d'opérer le passage à la limite et d'obtenir "P-L".

10. Si x ou y est hors de $[-(n+1), n+1]$ alors l'inégalité demandée est immédiate (elle se lit $0 \le \chi_{n+1}(z)$ qui est vraie pour tout z).
Sinon, $x, y \in [-(n+1), n+1]$ et donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in [-(n+1), n+1]$ et son image par χ_{n+1} vaut 1. L'inégalité est alors évidente là encore (χ_n ne prend que des valeurs entre 0 et 1).

11. Les fonctions $f_n = f\chi_n$ et $g_n = g\chi_n$ sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ et nulles hors de $[-(n+1), n+1]$. De plus avec la question précédente et l'hypothèse sur f, g, h on a (on mutiplie des inégalités avec des nombres positifs...)

$$\forall x, y,\ f_n(x)^\lambda g_n(y)^{1-\lambda} = \chi_n(x)^\lambda \chi_n(y)^{1-\lambda} f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \le (h\chi_{n+1})(\lambda x+(1-\lambda)y) = h_n(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

h_n est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ et intégrable sur $\mathbb{R}$ (nulle hors de $[-(n+2), n+2]$), et on peut ainsi utiliser "P-L" :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\,dx \ge \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)^\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx\right)^{1-\lambda}$$

On veut cette fois faire tendre n vers $+\infty$. On procède élémentairement :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx - \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\,dx\right| &= \left|\int_{-\infty}^{-n-2} h(x)\,dx + \int_{-n-2}^{-n-1} h(x)(1-\chi_{n+1}(x))\,dx\right.\\
&\quad \left. + \int_{n+1}^{n+2} h(x)(1-\chi_{n+1}(x))\,dx + \int_{n+2}^{+\infty} h(x)\,dx\right|\\
&\le \int_{-\infty}^{-n-2} |h(x)|\,dx + \int_{-n-2}^{-n-1} |h(x)|(1-\chi_{n+1}(x))\,dx\\
&\quad + \int_{n+1}^{n+2} |h(x)|(1-\chi_{n+1}(x))\,dx + \int_{n+2}^{+\infty} |h(x)|\,dx\\
&\le \int_{-\infty}^{-n-1} |h(x)|\,dx + \int_{n+1}^{+\infty} |h(x)|\,dx
\end{aligned}$$

Par définition de l'intégrabilité de h, le majorant est de limite nulle quand $n \to +\infty$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,dx$$

On procède de même pour les deux autres suites et on conclut.

2 Fonction log-concaves.

12. S étant symétrique, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres pour S. Notons μ_i la valeur propre associée à e_i. Pour tout i, on a $\mu_i = \langle S(e_i); e_i\rangle \geq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $x_1, \dots, x_n$ ses coordonnées sur la base $(e_1, \dots, e_n)$. On a

$$f(x) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^2\right)$$

f est alors, par théorèmes généraux, une fonction continue. Elle est de plus à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$; on note x_i et y_i leurs coordonnées dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mu_i(\lambda x_i + (1-\lambda)y_i)^2\right) = \prod_{i=1}^{n} \Psi(\lambda\sqrt{\mu_i}x_i + (1-\lambda)\sqrt{\mu_i}y_i)$$

où Ψ est la fonction $u \mapsto \exp(-u^2)$ de la partie **1.** En utilisant la question 6 avec $\sqrt{\mu_i}x_i$ et $\sqrt{\mu_i}y_i$ et en multipliant les inégalité (possible car les quantités sont toutes positives) on obtient

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \prod_{i=1}^{n} \Psi(\sqrt{\mu_i}x_i)^{\lambda}\Psi(\sqrt{\mu_i}y_i)^{1-\lambda} = f(x)^{\lambda}f(y)^{1-\lambda}$$

ce qui donne la log-concavité de f.

3 Quelques applications géométriques.

Remarque préliminaire : dans toutes la partie, les fonctions considérées sont continues et à support borné. Il n'y a pas de problème d'intégrabilité et toutes les intégrales écrites sont en réalité des intégrales de fonctions continues sur des segments. On écrira donc des "intégrales généralisées" qui n'en sont pas ce qui nous permet d'éluder les arguments d'existence. Par ailleurs, je ne vois pas où sert la généralisation de "P-L" aux fonctions continues par morceaux évoquée par l'énoncé.

13. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $f_x \ : \ y \mapsto f(x, y)$ (idem pour définir f_x et h_x). L'hypothèse faite sur f, g, h donne pour tous x_1, x_2, y_1, y_2 de $\mathbb{R}$

$$h_{\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1}(\lambda x_2 + (1-\lambda)y_2) \geq f_{x_1}(x_2)^{\lambda} g_{y_1}(y_2)^{1-\lambda}$$

On peut appliquer "P-L" avec $h_{\lambda x_1+(1-\lambda)y_1}, f_{x_1}, g_{y_1}$ pour obtenir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1, y)\, dy \geq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, y)\, dy\right)^{\lambda} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y_1, y)\, dy\right)^{1-\lambda}$$

En notant $H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)\, dx$, $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$, $G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y)\, dx$ on a donc

$$H(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) \geq F(x_1)^{\lambda} G(y_1)^{1-\lambda}$$

On peut réappliquer "P-L" avec F, G et H ce qui donne exactement

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y)\, dxdy \geq \left(\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy\right)^{\lambda} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\, dxdy\right)^{1-\lambda}$$

On pourrait, par un processus récurrent, traiter le cas de fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$.

14. L'ensemble $\Omega = \{\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ dxdy/\ f \in C(\mathcal{A})\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (elle contient 0 car l'application nulle est dans $C(\mathcal{A})$) et majorée ($\mathcal{A}$ est bornée et il existe r tel que $\mathcal{A}$ est inclus dans la boule fermée de centre 0 de rayon r notée B_r ; tout élément de Ω est inférieur à $\iint_{B_r} dxdy = \pi r^2$). Ω admet donc une borne supérieure $V(\mathcal{A})$.
Comme $\mathcal{A}$ est non vide, il possède un élément X. Comme $\mathcal{A}$ est ouvert, il existe un réel $r > 0$ telle que les éléments de la boule $D(X,r)$ de centre X et de rayon r soit incluse dans $\mathcal{A}$. En notant g la fonction continue égale à 1 sur $[0, r/2]$, nulle au-delà de r, affine sur $[r/2, r]$ et en posant $f(Y) = g(\|Y - X\|)$, on obtient un élément de $C(\mathcal{A})$ pour lequel $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ dxdy \geq \pi(r/2)^2$. $V(\mathcal{A})$ est plus grand que $\pi(r/2)^2$ et donc strictement positif.

15. Comme ci-dessus, on a

$$\forall f \in C(]a,b[\times]c,d[),\ \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ dxdy \leq \iint_{[a,b]\times[c,d]} dxdy = (b-a)(d-c)$$

Par passage à la borne supérieure, on a donc

$$V(]a,b[\times]c,d[) \leq (c-a)(d-c)$$

Soit ϕ_ε la fonction nulle hors de $[a,b]$, égale à 1 sur $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, affine sur $[a, a+\varepsilon]$ et sur $[b-\varepsilon, b]$ et continue (ϕ_ε est bien définie pour $\varepsilon > 0$ assez petit car $a < b$. On définit de même ψ_ε à partir du segment $[c,d]$. Soit alors $f_\varepsilon\ :\ (x,y) \mapsto \phi_\varepsilon(x)\psi_\varepsilon(y)$. f_ε est dans $C(]a,b[\times]c,d[)$ et

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_\varepsilon(x,y)\ dxdy \geq (b-a-2\varepsilon)(d-c-2\varepsilon)$$

Le minorant tend vers $(b-a)(d-c)$ quand $\varepsilon \to 0$. Il existe donc des éléments de $V(]a,b[\times]c,d[)$ aussi proche que l'on veut du majorant trouvé pour la borne supérieure. On a donc

$$V(]a,b[\times]c,d[) = (c-a)(d-c)$$

De façon similaire,

$$V(D(O,R)) \leq \pi R^2$$

En notant g_ε la fonction continue égale à 1 sur $[0, R-\varepsilon]$, nulle au-delà de R, affine sur $[R-\varepsilon, R]$ et en posant $f_\varepsilon(x,y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$, on montre comme dans le premier exemple que la majoration précédente est une égalité :

$$V(D(O,R)) = \pi R^2$$

Dans les deux cas, on obtient l'aire des parties proposées.

16. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des ouverts bornés.

- Il existe R_A et R_b tels que $\forall X \in \mathcal{A},\ \|x\| \leq R_A$ et $\forall x \in \mathcal{B},\ \|x\| \leq R_B$. Si $z \in \mathcal{A}+\mathcal{B}$ on a alors $\|z\| \leq R_A + R_B$ et $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ est borné.
- Soit $z \in \mathcal{A}+\mathcal{B}$; il existe $x \in \mathcal{A}$ et $y \in \mathcal{B}$ tels que $x + y = z$. $\mathcal{A}$ étant ouvert, il existe r_x tel que $D(x, r_x) \subset \mathcal{A}$. Soit $z' \in D(z, r_x)$; $z' = z' + z - z = (x + (z'-z)) + y$ et comme $\|z' - z\| < r_x$, $x + (z'-z) \in \mathcal{A}$. Ainsi $z' \in \mathcal{A}+\mathcal{B}$. On a montré que $D(z, r_x) \subset \mathcal{A}+\mathcal{B}$ et ce dernier ensemble est donc ouvert.

Soient $f \in C(\mathcal{A})$ et $g \in C(\mathcal{B})$. Soit h la fonction définie par

$$\forall Z \in \mathbb{R}^2,\ h(Z) = \sup\{f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda}/\ X, Y \in \mathbb{R}^2,\ Z = \lambda X + (1 - \lambda Y)\}$$

h est continue sur $\mathbb{R}^2$ d'après le résultat admis par l'énoncé. Par définition de la borne supérieure, on a

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2,\ h(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geq f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda}$$

On peut appliquer la question **13.** pour obtenir

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\ dxdy \geq \left(\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ dxdy\right)^\lambda \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\ dxdy\right)^{1-\lambda}$$

Par ailleurs, si $Z \notin \lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B}$ alors $h(Z) = 0$ (c'est la borne supérieure d'un ensemble qui ne contient que 0 car si $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$ alors $X \notin \mathcal{A}$ ou $Y \notin \mathcal{B}$ et le produit $f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda}$ est nul l'un de facteurs l'étant). Enfin, $\forall Z \in \mathbb{R}^2,\ h(Z) \in [0,1]$ (borne supérieure d'une partie incluse dans $[0,1]$). On a donc $h \in C(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$ et donc

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\ dxdy \leq V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$$

On vient donc de prouver que

$$\forall f \in C(\mathcal{A}),\ \forall g \in C(\mathcal{B}),\ \left(\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\ dxdy\right)^\lambda \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\ dxdy\right)^{1-\lambda} \leq V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$$

En passant à la borne supérieure sur f (on peut "factoriser" par $\left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\ dxdy\right)^{1-\lambda}$ qui ne dépend pas de f et on utilise ensuite la croissance de $t \mapsto t^\lambda$ pour "faire sortir" la puissance λ de la borne supérieure) on obtient

$$\forall g \in C(\mathcal{B}),\ V(\mathcal{A})^\lambda \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\ dxdy\right)^{1-\lambda} \leq V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$$

Avec des arguments similaires, le passage à la borne supérieure sur g donne enfin

$$V(\mathcal{A})^\lambda V(\mathcal{B})^{1-\lambda} \leq V(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$$

17. Soient $f \in C(\mathcal{A})$ et $g \in C(\mathcal{B})$. Soit h la fonction définie par

$$\forall Z \in \mathbb{R}^2,\ h(Z) = u(Z) \sup\{f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda} /\ X, Y \in \mathbb{R}^2,\ Z = \lambda X + (1 - \lambda Y)\}$$

h est continue sur $\mathbb{R}^2$ d'après le résultat admis par la question **16**. Par définition de la borne supérieure, on a

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2,\ h(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geq u(\lambda X + (1-\lambda)Y) f(X)^\lambda g(Y)^{1-\lambda}$$

La log-concavité de u donne alors

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^2,\ h(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geq (u(X)f(X))^\lambda (u(Y)g(Y))^{1-\lambda}$$

Le raisonnement se poursuit alors comme en question précédente (on utilisera $h/u \in C(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$) pour obtenir

$$\gamma(\mathcal{A})^\lambda \gamma(\mathcal{B})^{1-\lambda} \leq \gamma(\lambda\mathcal{A} + (1-\lambda)\mathcal{B})$$