Ecoles nationales des Ponts et Chaussées...

Correction de la 2ème épreuve ; Filière PSI 2008

Olivier HALGAND

I - Série de Fourier à deux variables

1. Pour tout eniter relatif m, on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad u_m(y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{d}x.$$

• Puisque u est doublement 2π-périodique, elle est 2π-périodique par rapport à sa deuxième variable, donc

$$\boxed{u_m \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$$

• La fonction u_m est une intégrale à paramètre sur un segment telle que :

♢ $\forall y \in \mathbb{R},\ x \mapsto u(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}$ est continue et intégrable sur le segment $[0,2\pi]$;
♢ $\forall x \in [0,2\pi],\ y \in \mathbb{R} \mapsto u(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}$ est continue.

Donc, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres sur un segment,

$$\boxed{u_m \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

• De la même manière :

♢ $\forall y \in \mathbb{R},\ x \mapsto u(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}$ est continue et intégrable sur le segment $[0,2\pi]$;
♢ $\forall x \in [0,2\pi],\ y \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}$ est continue ;
♢ $\forall y \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}$ est continue et intégrale sur le segment $[0,2\pi]$.

Donc, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres sur un segment,

$$\boxed{u_m \text{ est de classe } \mathscr{C}^1\text{, donc dérivable, sur } \mathbb{R}.}$$

On en déduit donc que la série de Fourier de u_m est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ vers u_m :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad u_m(y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_{m,n}\,\mathrm{e}^{-iny},$$

avec : $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_{m,n}$

$$\begin{aligned} c_{m,n} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_m(y)\,\mathrm{e}^{-iny}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-iny}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{e}^{-iny}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{d'après le théorème de Fubini} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\forall m,n \in \mathbb{Z}, \quad c_{m,n} = a_{m,n}(u).$$

On peut donc conclure, d'après l'égalité de Parseval :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \left|u_m(y)\right|^2 \mathrm{d}y = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|a_{m,n}(u)\right|^2.}$$

2. De la même manière, si on se fixe $y \in \mathbb{R}$, alors la fonction $u_y : x \mapsto u(x,y)$ est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc la série de Fourier de u_y converge normalement vers u_y sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_y(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m \,\mathrm{e}^{-imx},$$

$$\text{avec :} \quad \forall m \in \mathbb{Z},\ c_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_y(x)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{d}x = u_m(y).$$

On peut donc conclure, d'après l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|u_y(x)\right|^2 \mathrm{d}x = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|u_m(y)\right|^2,$$

soit :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|u(x,y)\right|^2 \mathrm{d}x = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left|u_m(y)\right|^2.}$$

3. D'après **1.**, on sait que $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \left|a_{m,n}(u)\right|^2$ converge et que sa somme est : $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|u_m(y)\right|^2 \mathrm{d}y$. On a donc, pour tout $M \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{M}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|a_{m,n}(u)\right|^2\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m=0}^{M}\left|u_m(y)\right|^2\right)\mathrm{d}y && \text{par linarité de l'intégrale}\\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|u_m(y)\right|^2\right)\mathrm{d}y && \text{par croissance de l'intégrale}\\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|u(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y && \text{d'après } \mathbf{2.}
\end{aligned}$$

On en déduit que la série à termes positifs $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left|a_{m,n}(u)\right|^2\right)$ est majorée ; elle est donc convergente. On fait de même pour la série $\sum\limits_{m=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\left|a_{-m,n}(u)\right|^2\right)$ et donc, d'après les définitions données :

$$\boxed{\text{la série double } \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|a_{m,n}(u)\right|^2 \text{ converge.}}$$

On a donc, d'après **1.** :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|a_{m,n}(u)\right|^2\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|u_m(y)\right|^2\mathrm{d}y\right).$$

Or, les fonctions u_m sont continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $[0,2\pi]$, donc il en est de même des fonctions $|u_m|^2$. De plus, la série $\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}}|u_m|^2$ converge en tout point de $[0,2\pi]$. On peut donc intégrer terme à terme, ce qui donne l'égalité :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|a_{m,n}(u)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left|u_m(y)\right|^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|u(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$$

et donc :

$$\boxed{\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|a_{m,n}(u)\right|^2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|u(x,y)\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.}$$

4. D'après l'hypothèse, il existe $A \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \quad \left|a_{m,n}(u)\,\mathrm{e}^{imx+iny}\right| = \left|a_{m,n}(u)\right| \leqslant \frac{A}{(1+|m|)^2(1+|n|)^2}.$$

Or, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|n|)^2}$ converge : c'est une série de Riemann (pour $n \in \mathbb{N}$ et $-n \in \mathbb{N}$) ; notons α sa somme. On en déduit que la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|a_{m,n}(u)\right|$ converge et est majorée par $\dfrac{A}{\alpha}\dfrac{1}{(1+|m|)^2}$. Or, la série $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|m|)^2}$ converge (vers α puisque c'est la même série que précédemment). On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{la série double } \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}(u)\,\mathrm{e}^{imx+iny} \text{ converge absolument, donc est sommable.}}$$

5. • Soit $m \in \mathbb{Z}$ et considérons $v_m : (x,y) \mapsto \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}(u)\,\mathrm{e}^{imx+iny}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application $(x,y) \mapsto a_{m,n}(u)\,\mathrm{e}^{imx+iny}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}(u)\,\mathrm{e}^{imx+iny}$ converge normalement d'après **4.** D'après le **théorème 1.** donné dans l'énoncé, v_m est continue sur $\mathbb{R}^2$.

• Mais de même, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, v_m est continue sur $\mathbb{R}^2$ et la série $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}} v_m(x,y)$ converge normalement donc :

$$\boxed{\text{la fonction } v \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}^2.}$$

6. Pour tous entiers m et n, l'application $v_{m,n} : (x,y) \mapsto a_{m,n}(u)\,\mathrm{e}^{imx+iny}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et :

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, \quad \frac{\partial^{k+l} v_{m,n}}{\partial x^k \partial y^l}(x,y) = (im)^k (in)^l a_{m,n}(u)\,\mathrm{e}^{imx+iny}.$$

Donc, d'après l'hypothèse, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\left|\frac{\partial^{k+l} v_{m,n}}{\partial x^k \partial y^l}(x,y)\right| \leqslant \frac{A|m|^k\,|n|^l\,\left|a_{m,n}(u)\right|}{(1+|m|)^{k+2}(1+|n|)^{l+2}}.$$

Or, de même qu'en **4.**, la série double $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{A|m|^k\,|n|^l\,\left|a_{m,n}(u)\right|}{(1+|m|)^{k+2}(1+|n|)^{l+2}}$ converge, donc la série : $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\partial^{k+l} v_{m,n}}{\partial x^k \partial y^l}(x,y)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}^2$. Donc :

$$\boxed{v \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ et : } \forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, \quad \frac{\partial^{k+l} v}{\partial x^k \partial y^l}(x,y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (im)^k (in)^l a_{m,n}(u)\,\mathrm{e}^{imx+iny}.}$$

7. Puisque la série $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_{m,n}(x,y)$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, on peut écrire pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x,y)\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}(u)\,\mathrm{e}^{imx+iny}\right)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}(u)\,\mathrm{e}^{iny}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{imx}\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

Or, sur l'espace vectoriel E des fonctions 2π-périodiques à valeurs complexes, la famille des ε_k : $x \mapsto \mathrm{e}^{ikx}$ forment une base orthonormée pour la forme hermitienne positive :

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \langle f \mid g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x.$$

On a donc :

$$\forall (m,k) \in \mathbb{Z}^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{imx}\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \delta_{m,k} \qquad \text{symbole de Kronecker)}$$

On en tire :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x,y)\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{k,n}(u)\,\mathrm{e}^{iny}\,.}$$

8. De même que précédemment, on a pour tout couple $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned}
a_{k,l}(v) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x,y)\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{e}^{-ily}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}(u)\,\mathrm{e}^{imx}\,\mathrm{e}^{iny}\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{e}^{-ily}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}(u)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{imx}\,\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{iny}\,\mathrm{e}^{-ily}\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{m,n}(u)\,\delta_{m,k}\,\delta_{n,l}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2, \quad a_{k,l}(v) = a_{k,l}(u).}$$

9. Ainsi, puisque u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elles ont les mêmes coefficients de Fourier, on en déduit que :

$$\boxed{u = v.}$$

II - Application

10. Puisque u_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, on a pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned}
a_{m,n}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) &= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{e}^{-iny}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{-iny}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

avec, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u_0}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{d}x = \Big[u_0(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u_0(x,y)(-im)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{d}x = im\int_0^{2\pi} u_0(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{d}x.$$

On obtient donc :

$$a_{m,n}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = im \times \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} u_0(x,y)\,\mathrm{e}^{-imx}\,\mathrm{e}^{-iny}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

soit :

$$\boxed{\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2, \quad a_{m,n}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = im\,a_{m,n}(u_0).}$$

11. Soit $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Puisque u_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, on a d'après **10.** :

$$\left|a_{m,n}(u_0)\right| = \frac{1}{|m|}\left|a_{m,n}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right| = \ldots = \frac{1}{|m|^k}\left|a_{m,n}\left(\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k}\right)\right|,$$

et donc, de la même manière :

$$\left|a_{m,n}(u_0)\right| = \frac{1}{|m|^k|n|^l}\left|a_{m,n}\left(\frac{\partial^{k+l}u_0}{\partial x^k\partial y^l}\right)\right|.$$

Donc :

$$\left|a_{m,n}(u_0)\right|\big(1+|m|\big)^k\big(1+|n|\big)^l = \frac{\big(1+|m|\big)^k}{|m|^k}\,\frac{\big(1+|n|\big)^l}{|n|^l}\left|a_{m,n}\left(\frac{\partial^{k+l}u_0}{\partial x^k\partial y^l}\right)\right|.$$

Or, d'une part :

$$\lim_{|m|\to+\infty}\frac{\big(1+|m|\big)^k}{|m|^k} = 1 \quad \text{et :} \qquad \lim_{|n|\to+\infty}\frac{\big(1+|n|\big)^l}{|n|^l} = 1.$$

Et, d'autre part, la série double $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|a_{m,n}\left(\frac{\partial^{k+l}u_0}{\partial x^k\partial y^l}\right)\right|^2$ converge d'après **3.**, donc la suite double $\displaystyle\left(a_{m,n}\left(\frac{\partial^{k+l}u_0}{\partial x^k\partial y^l}\right)\right)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ converge vers 0 (lorsque m ou/et n tendent vers $\pm\infty$) et est donc bornée. Finalement :

$$\boxed{\text{la suite double } \left|a_{m,n}(u_0)\right|\big(1+|m|\big)^k\big(1+|n|\big)^l \text{ est bornée.}}$$

12. Cherchons u de la forme :

$$u(t,x,y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\varphi_{m,n}(t)\alpha_{m,n}\,\mathrm{e}^{imx+iny}.$$

• Alors, u doit vérifier l'égalité (4), c'est-à-dire : $\forall(t,x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t,x,y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\alpha_{m,n}\,\mathrm{e}^{imx+iny}\left[\varphi'_{m,n}(t) + (m^2+n^2)\varphi_{m,n}(t)\right] = 0.$$

On en déduit que : $\varphi'_{m,n}(t) + (m^2+n^2)\varphi_{m,n}(t) = 0$, et donc : $\varphi_{m,n}(t) = K\,\mathrm{e}^{-(m^2+n^2)t}$. On obtient donc :

$$u(t,x,y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}K\,\mathrm{e}^{-(m^2+n^2)t}\,\alpha_{m,n}\,\mathrm{e}^{imx+iny}.$$

• u doit aussi vérifier l'égalité (3), c'est-à-dire : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ u(0,x,y) = u_0(x,y)$. Or, puisque $u_0\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{C})$ est doublement 2π-périodique par hypothèse, elle vérifie l'hypothèse démontrée en **11.** et on peut donc utiliser les résultats de la partie **I.** :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad u_0(x,y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_{m,n}(u_0)\,\mathrm{e}^{imx+iny}.$$

Ainsi : $\forall(m,n)\in\mathbb{Z}^2, K\alpha_{m,n} = a_{m,n}(u_0)$.

• Les autres conditions étant respectées de manière évidente, on obtient finalement,

$$\boxed{u(t,x,y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{e}^{-(m^2+n^2)t}\,a_{m,n}(u_0)\,\mathrm{e}^{imx+iny} \text{ est une solution au problème posé.}}$$

13. On considère dans cette question les deux fonctions :

$$A_u : t\mapsto \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\big|u(t,x,y)\big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{et :} \qquad B_u = \int_0^t\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial u}{\partial x}(s,x,y)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(s,x,y)\right|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}s.$$

• **Continuité** :
- $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad t\mapsto\big|u(t,x,y)\big|^2$ est continue sur $[0,+\infty[$;

- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left|u(t,x,y)\right|^2$ est continue et intégrable sur $[0,2\pi]^2$;

- pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $r > 0$ tel que $[a-r, a+r] \subset \mathbb{R}_+^*$ et alors u est continue sur le compact $[a-r,a+r] \times [0,2\pi]^2$ et y est donc bornée : l'hypothèse de domination est donc vérifiée. De même si $a = 0$ avec l'intervalle $[0, a+r]$.

Ainsi, A_u est continue en tout $a \in \mathbb{R}_+$ et donc sur $\mathbb{R}_+$. De plus, par définition, B_u est une primitive d'une fonction continue, donc elle est continue. Ainsi :

$$\boxed{E_u \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

- **Dérivabilité** :
- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left|u(t,x,y)\right|^2$ est continue et intégrable sur $[0,2\pi]^2$;
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \dfrac{\partial |u|^2}{\partial t}(t,x,y) = \left(u\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)(t,x,y)$ est continue sur $[0,+\infty[$;
- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(u\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)(t,x,y)$ est continue et intégrable sur $[0,2\pi]^2$;

- de même que précédemment, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $r > 0$ tel que $[a-r,a+r] \subset \mathbb{R}_+^*$ et alors $\left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ est continue sur le compact $[a-r,a+r] \times [0,2\pi]^2$ et y est donc bornée : l'hypothèse de domination est donc vérifiée.

Ainsi, A_u est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par définition, B_u est une primitive d'une fonction continue, donc elle est dérivable. Ainsi :

$$\boxed{E_u \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

On peut alors écrire, pour tout $(t,x,y) \in \mathbb{R}_+^*$:

$$E_u'(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x,y)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(t,x,y)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

donc :

$$\boxed{E_u'(t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,x,y) + \left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x,y)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(t,x,y)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.}$$

14. Pour tout $(t,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)(t,x,y) \\
= \;& \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + u\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \overline{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + u\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \overline{u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)(t,x,y) \\
= \;& \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{u}{2}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2}\right) + \frac{\overline{u}}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right)(t,x,y)
\end{aligned}$$

Or u, et donc $\overline{u}$, vérifient (4) donc on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{u}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)(t,x,y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{u}{2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\overline{u}}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,x,y).}$$

15. On a bien sûr, pour tout $(t,x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(t,x,y)\right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}(t,x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}(t,x,y),$$

et de même avec les dérivées partielles par rapport à y. La formule obtenue en **13.** devient donc :

$$E_u'(t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{u}{2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\overline{u}}{2}\frac{\partial u}{\partial t}\right)(t,x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}(t,x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}(t,x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Donc, en utilisant la formule obtenue en **14.** :

$$E'_u(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) (t, x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E'_u(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y + \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) (t, x, y) \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[u \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^{2\pi} \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[u \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^{2\pi} \mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

car u et $\overline{u}$ sont doublement 2π-périodiques. Donc, puisque E_u est continue sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit qu'elle est constante sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E_u(t) = E_u(0).}$$

16. Soient u et v deux solutions au problème posé, et considérons la fonction $u - v$. Celle-ci vérifie alors les conditions a), b), c) et d) du problème et de plus :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (u - v)(0, x, y) = 0,$$

et :

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial (u - v)}{\partial t}(t, x, y) - \frac{\partial^2 (u - v)}{\partial x^2}(t, x, y) - \frac{\partial^2 (u - v)}{\partial y^2}(t, x, y) = 0.$$

Donc, $u - v$ est solution du problème posé dans le cas particulier où u_0 est la fonction nulle. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E_{u-v}(t) = E_{u-v}(0) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |0|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 0.$$

D'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^t \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial (u - v)}{\partial x}(s, x, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial (u - v)}{\partial y}(s, x, y) \right|^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right) = 0.$$

Tous les termes étant potitifs, et les fonctions intégrées étant continues, on en déduit que :

$$\forall (s, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial (u - v)}{\partial x}(s, x, y) = \frac{\partial (u - v)}{\partial y}(s, x, y) = 0.$$

On en déduit que $u - v$ est constante vis-à-vis des variables x et y et donc, puisque $u - v$ vérifie aussi l'égalité (4), vis-à-vis de la varaible t. Donc, $u - v$ est constante. En particulier, pour $s = 0$ on obtient : $u - v = 0$. Finalement, $u = v$ et donc :

$$\boxed{\text{le problème posé possède au plus une solution.}}$$