MINES PSI2 2007
un corrigé

1 Préliminaires.

1. La fonction ϕ est dérivable sur $[0,1]$ et

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \phi'(\lambda) = 2\lambda^{2t-1}(1-\lambda)\,(t-\lambda(1+t))$$

ϕ est donc croissante sur $\left[0, \frac{t}{1+t}\right]$ puis décroissante sur $\left[\frac{t}{1+t}, 1\right]$. On a alors

$$\max_{\lambda\in[0,1]} \phi(\lambda) = \phi\left(\frac{t}{1+t}\right) = \frac{t^{2t}}{(1+t)^{2(t+1)}}$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$; la fonction $g_a : x \mapsto |x|^a = \exp(a\ln(|x|))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g_a'(x) = \frac{a}{x}\exp(a\ln(|x|)) = a.sgn(x).|x|^{a-1}$$

où $sgn(x)$ désigne le signe de x.
Si $a > 1$ on a $g_a(x) \to 0$ et $g_a'(x) \to 0$ quand $x \to 0$. g_a est donc prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 et la fonction prolongée est, par corollaire des accroissements finis, dérivable en 0 à dérivée continue avec $g_a'(0) = 0$.
En particulier, ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (en ayant posé $\psi(0) = 0$) et

$$\forall x \neq 0,\ \psi'(x) = 2t.sgn(x).|x|^{2t-1}$$

On a $\psi'(0) = 0$ et on peut considérer que la formule précédente est encore valable pour $x = 0$.
ψ' est de de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et (en distinguant les cas $x > 0$ et $x < 0$)

$$\forall x \neq 0,\ \psi''(x) = 2t(2t-1)|x|^{2t-2}$$

$\psi''(x) \to 0$ quand $x \to 0$ et un corollaire des accroissement finis donne que ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ avec $\psi''(0) = 0$.

3. Par théorèmes généraux, l est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et la formule de dérivation composée donne

$$\forall x,\ l'(x) = h'(x)\psi'(h(x)) \ \text{ et } \ l''(x) = h''(x)\psi'(h(x)) + (h'(x))^2\psi''(h(x))$$

2 Propriétés de I_t.

4. On veut étudier (β étant fixé dans $\mathbb{R}^n$) la fonction

$$F : \varepsilon \mapsto \int_0^{2\pi} |P_r(x, \alpha + \varepsilon\beta)|^{2t}\, dx$$

Il s'agit donc d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres. On considère donc la fonction

$$f : (\varepsilon, x) \mapsto |P_r(x, \alpha + \varepsilon\beta)|^{2t}$$

- $\forall \varepsilon \in [-1,1],\ x \mapsto f(\varepsilon, x)$ est continue sur $[0, 2\pi]$ et donc intégrable sur ce segment.
- Soit $x \in [0, 2\pi]$; la fonction $l_x : \varepsilon \mapsto P_r(x, \alpha + \varepsilon\beta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et sa dérivée est

$$l_x' : \varepsilon \mapsto \sum_{k=1}^n r_k\beta_k \sin(kx - \alpha_k - \varepsilon\beta_k)$$

D'après la question 3, $\forall x \in [0, 2\pi],\ \varepsilon \mapsto f(\varepsilon, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et sa dérivée est $\varepsilon \mapsto l_x'(\varepsilon)\psi'(l_x(\varepsilon))$.

- $(\varepsilon, x) \mapsto l_x(\varepsilon)$ et $(\varepsilon, x) \mapsto l_x(\varepsilon)$ sont des fonctions continues par théorème généraux (somme et produit de telles fonctions). Comme ψ' est continue, la fonction $(\varepsilon, x) \mapsto l'_x(\varepsilon)\psi'(l_x(\varepsilon))$ est donc aussi continue. Sur le pavé compact $[-1,1] \times [0, 2\pi]$, cette fonction est alors bornée (majorée en module par un certain M). On a ainsi

$$\forall \varepsilon \in [-1,1],\ \forall x \in [0,\pi],\ |l'_x(\varepsilon)\psi'(l_x(\varepsilon))| \leq M$$

Le majorant est indépendant de ε et est une fonction intégrable sur $[0, 2\pi]$ (fonction constante sur un segment).

Le théorème de cours s'applique et montre que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ avec

$$\forall \varepsilon \in [-1,1],\ F'(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} l'_x(\varepsilon)\psi'(l_x(\varepsilon))\, dx$$

Avec l'expression obtenue plus haut, ceci s'écrit

$$\forall \varepsilon \in [-1,1],\ F'(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \left(\psi'(P_r(x, \alpha + \varepsilon\beta)) \sum_{k=1}^{n} r_k \beta_k \sin(kx - \alpha_k - \varepsilon\beta_k) \right) dx$$

5. Les même arguments sont utilisables pour montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$ (en particulier, on pourra encore dominer par une constante). La rédaction étant fondamentalement la même, on se permet de seulement donner le résultat :

$$\forall \varepsilon \in [-1,1],\ F''(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \left(l''_x(\varepsilon)\psi'(l_x(\varepsilon)) + (l'_x(\varepsilon))^2 \psi''(l_x(\varepsilon)) \right) dx$$

où on a

$$l'_x(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} r_k \beta_k \sin(kx - \alpha_k - \varepsilon\beta_k)$$

$$l''_x(\varepsilon) = -\sum_{k=1}^{n} r_k \beta_k^2 \cos(kx - \alpha_k - \varepsilon\beta_k)$$

6. Par définition des dérivées partielles, on a

$$\frac{\partial L_\alpha}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \beta) = F'(\varepsilon)$$

où F est la fonction des question 4 et 5. Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, le théorème fondamental indique que

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

Avec les notations de l'énoncé, ceci s'écrit

$$I_t(\alpha + \beta) - I_t(\alpha) = \int_0^1 \frac{\partial L_\alpha}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, \beta)\, d\varepsilon$$

En utilisant l'expression de F' obtenue en question 4, on a

$$\forall \varepsilon \in [0,1],\ \left|F'(\varepsilon)\right| \leq \int_0^{2\pi} |l'_x(\varepsilon)||\psi'(l_x(\varepsilon))|\, dx$$

La fonction $(\varepsilon, x) \mapsto l_x(\varepsilon)$ est continue sur $[0,1] \times [0, 2\pi]$. On obtient encore une fonction continue en composant par ψ'. Sur le pavé compact $[0,1] \times [0, 2\pi]$, $(\varepsilon, x) \mapsto \psi'(l_x(\varepsilon))$ est donc bornée (majorée en module par une constante M indépendante de x et ε). En reprenant l'expression de l'_x, on a alors

$$\forall \varepsilon \in [0,1],\ \left|F'(\varepsilon)\right| \leq 2\pi M \sum_{k=1}^{n} |r_k \beta_k|$$

On en déduit donc (en intégrant cette inégalité) que

$$|I_t(\alpha+\beta) - I_t(\alpha)| \leq 2\pi M \sum_{k=1}^{n} |r_k \beta_k|$$

Le majorant est de limite nulle quand $\|\beta\| \to 0$ (car alors chaque β_k est de limite nulle). On a donc $I_t(\alpha+\beta) \to I_t(\alpha)$ quand $\beta \to 0$ ce qui signifie que I_t est continue en α (et donc sur $\mathbb{R}^n$ car ceci est vrai pour tout α).

7. Il s'agit maintenant d'étudier, pour toutes les valeurs de l'entier k, la fonction

$$G_k : \alpha_k \mapsto \int_0^{2\pi} \left| \sum_{i=1}^{n} r_i \cos(ix - \alpha_i) \right|^{2t} dx$$

On veut montrer que G_k est deux fois dérivable et donc étudier le taux d'accroissement (quand $\beta_k \to 0$)

$$\frac{G_k(\alpha_k + h_k) - G_k(\alpha_k)}{h_k} = \frac{1}{h_k} \left(L_\alpha(h_k, e_k) - L_\alpha(0, e_k)\right)$$

où e_k est le k-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ceci revient à étudier l'existence de $\frac{\partial L_\alpha}{\partial \varepsilon}(0, e_k)$ ce qui a déjà été fait à la question 4. De même, l'existence de la dérivée seconde de G_k correspond au calcul fait en question 5 avec $\varepsilon = 0$ et $\beta = e_k$. On a ainsi

$$\frac{\partial^2 I_t}{\partial \alpha_k^2}(\alpha) = \frac{\partial^2 L_\alpha}{\partial \varepsilon^2}(0, e_k) = \int_0^{2\pi} \Big(-r_k \cos(kx - \alpha_k)\psi'(P_r(x,\alpha)) + (r_k \sin(kx - \alpha_k))^2 \psi''(P_r(x,\alpha)) \Big)\ dx$$

8. Pour toute valeur de k, $\alpha_k \mapsto I_t(\alpha)$ est 2π périodique. On obtient alors toutes les valeurs atteintes par I_t en se restreignant à un pavé $[0, 2\pi]^n$. Sur ce pavé compact, la fonction continue I_t est bornée et atteint ses bornes. Elle admet un minimum qui, d'après la remarque initiale, est global.

9. I_t étant minimale en $\tilde{\alpha}$, pour tout choix de $\beta \in \mathbb{R}^n$, la fonction $F : \varepsilon \mapsto L_{\tilde{\alpha}}(\varepsilon, \beta)$ admet un minimum sur $[-1,1]$ (et même sur $\mathbb{R}$) en 0. Comme F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1,1]$ et que 0 est intérieur à $[-1,1]$, $F'(0) = 0$ et $F''(0) \geq 0$ ($F(\varepsilon) = F(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}F''(0) + o_0(\varepsilon^2)$ et on aurait une contradiction si $F''(0) < 0$). Ceci signifie exactement que

$$\frac{\partial^2 L_{\tilde{\alpha}}}{\partial \varepsilon^2}(0, \beta) \geq 0$$

En prenant pour β les éléments de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient que

$$\forall k,\ \frac{\partial^2 I_t}{\partial \alpha_k^2}(\tilde{\alpha}) \geq 0$$

et on en déduit a fortiori que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 I_t}{\partial \alpha_k^2}(\tilde{\alpha}) \geq 0$$

10. Reprenons les expressions obtenues en question 7 pour exprimer l'inégalité de la question 9 :

$$\int_0^{2\pi} \psi'(P_r(x,\tilde{\alpha})) \sum_{k=1}^{n} r_k \cos(kx - \tilde{\alpha}_k)\ dx \leq \int_0^{2\pi} \psi''(P_r(x,\alpha)) \sum_{k=1}^{n} (r_k \sin(kx - \alpha_k))^2\ dx$$

D'après l'expression de ψ'

$$\psi'(P_r(x,\tilde\alpha))\sum_{k=1}^n r_k\cos(kx-\tilde\alpha_k) = \psi'(P_r(x,\tilde\alpha))P_r(x,\tilde\alpha) = 2t|P_r(x,\tilde\alpha)|^{2t}$$

D'après l'expression de ψ''

$$\psi''(P_r(x,\alpha))\sum_{k=1}^n (r_k\sin(kx-\alpha_k))^2 = 2t(2t-1)\psi(P_r(x,\tilde\alpha))\sum_{k=1}^n (r_k\sin(kx-\alpha_k))^2$$

En injectant ces expressions dans l'inégalité précédente, on obtient (après simplification par $2t>0$; en majorant $(r_k\sin(kx-\alpha_k))^2$ par r_k^2, en sommant les inégalités et en multipliant par $(2t-1)\psi(P_r(x,\tilde\alpha))$ qui est positif)

$$I_t(\tilde\alpha) \le (2t-1)\|r\|^2 I_{t-1}(\tilde\alpha)$$

11. On écrit que

$$(2t-1)\|r\|^2 I_{t-1}(\tilde\alpha) = \int_0^{2\pi} \underbrace{(2t-1)\|r\|^2}_{=u(x)}\underbrace{|P_r(x,\tilde\alpha)|^{2(t-1)}}_{=v(x)}\ dx$$

On utilise alors l'inégalité (1) avec $p=t$ et $q=\frac{t}{t-1}$ ce qui donne, après simplifications :

$$(2t-1)\|r\|^2 I_{t-1}(\tilde\alpha) \le (2t-1)\|r\|^2(2\pi)^{1/t}\left(I_t(\tilde\alpha)\right)^{\frac{t-1}{t}}$$

L'inégalité (2) donne alors

$$\left(I_t(\tilde\alpha)\right)^{\frac{1}{t}} \le (2t-1)\|r\|^2(2\pi)^{1/t}$$

ou encore (croissance sur $\mathbb{R}^+$ de l'élévation à la puissance t)

$$I_t(\tilde\alpha) \le 2\pi((2t-1)\|r\|^2)^t$$

3 Propriétés de P_r.

12. On a immédiatement

$$\int_0^{2\pi} P_r(x,\alpha)\ dx = \sum_{k=1}^n r_k\int_0^{2\pi}\cos(kx-\alpha_k)\ dx = 0$$

De même

$$\int_0^{2\pi} |P_r(x,\alpha)|^2\ dx = \sum_{1\le k,l\le n} r_k r_l\int_0^{2\pi}\cos(kx-\alpha_k)\cos(lx-\alpha_l)\ dx$$

Comme $2\cos(kx-\alpha_k)\cos(lx-\alpha_l) = \cos((k+l)x-(\alpha_k+\alpha_l))+\cos((k-l)x-(\alpha_k-\alpha_l))$, on a

$$\int_0^{2\pi}\cos(kx-\alpha_k)\cos(lx-\alpha_l)\ dx = \pi\delta_{k,l}$$

et ainsi

$$\int_0^{2\pi}|P_r(x,\alpha)|^2\ dx = \pi\|r\|^2$$

13. $x\mapsto|P_r(x,\alpha)|$ est une fonction continue et 2π-périodique. Sa borne supérieure sur $\mathbb{R}$ est donc égale à celle sur $[0,2\pi]$. Elle est finie et c'est un maximum (atteint donc) car $[0,2\pi]$ est un compact. Il existe donc x_α (et on peut le trouver dans $[0,2\pi]$) tel que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|P_r(x,\alpha)| = \max_{x\in\mathbb{R}}|P_r(x,\alpha)| = |P_r(x_\alpha,\alpha)|$$

14. Comme l'élévation au carré est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\forall x \in [0, 2\pi],\ |P_r(x, \alpha)|^2 \leq S^2$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 2π et avec la question 12, on a donc

$$\pi \|r\|^2 \leq 2\pi S^2$$

15. $x \mapsto |P_r(x, \alpha)|$ n'est pas nulle sur $\mathbb{R}$ car sinon elle le serait sur $[0, 2\pi]$ et on aurait donc $\pi\|r\|^2 = 0$ (avec la question 12).
$x \mapsto P_r(x, \alpha)$ est une fonction continue sur $[0, 2\pi]$ et d'intégrale nulle. Si elle était de signe constant, elle serait nulle sur $[0, 2\pi]$ et donc sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité, ce qui est faux.

16. On vient de voir que $x \mapsto |P_r(x, \alpha)|$ n'est de signe constant sur une période (car elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}$). Comme cette fonction est continue, elle s'annule sur $[x_\alpha, x_\alpha + 2\pi]$. Sur cet intervalle, la fonction prend la valeur 0 et la valeur S (en x_α). Par théorème des valeurs intermédiaires (la fonction est continue), elle prend toutes les valeurs de $[0, S]$. En particulier, V_λ^+ est non vide quand $\lambda \in [0, 1]$.
V_λ^+ est, par définition, borné (inclus dans $[x_\alpha, x_\alpha + 2\pi]$).
Si (ξ_k) est une suite d'éléments de V_λ^+ qui converge alors la limite ξ est dans $[x_\alpha, x_\alpha + 2\pi]$ (intervalle fermé) et $|P_r(\xi, \alpha)| = \lambda S$ (continuité de $x \mapsto |P_r(x, \alpha)|$). On a donc $\xi \in V_\lambda^+$ et cet ensemble est fermé.
V_λ^+ est donc compact (fermé borné de $\mathbb{R}$) et admet un minimum (et un maximum) ce qui permet de poser

$$b = \min\{\xi,\ \xi \in V_\lambda^+\}$$

17. De la même façon, on peut considérer

$$a = \max\{\zeta \in [x_\alpha - 2\pi, x_\alpha]/\ |P_r(\zeta, \alpha)| = \lambda S\} = \max W_\lambda^+$$

Comme $|P_r(x_\alpha, \alpha)| = S \neq \lambda S$, ni a ni b n'est égal à x_α et donc

$$a < x_\alpha < b$$

De plus, par définition,

$$|P_r(a, \alpha)| = |P_r(b, \alpha)| = \lambda S$$

$x \mapsto |P_r(x, \alpha)$ s'annule sur $[x_\alpha, x_\alpha + 2\pi]$ en un certain c. On a $|P_r(x_\alpha + 2\pi, \alpha)| = |P_r(x_\alpha, \alpha)| = 1 > \lambda S > 0 = |P_r(c, \alpha)|$ et donc (théorème des valeurs intermédiaires), V_λ^+ contient un élément de $]x_\alpha, c[$ et un autre de $]c, x_\alpha + 2\pi[$. V_λ^+ contient donc un élément $a' > b$ et $a' - 2\pi \in W_\lambda^+$ donne $a' - 2\pi < a$ et donc aussi $b - 2\pi < a$ ou encore

$$b - a < 2\pi$$

Enfin, par définition, $x \mapsto |P_r(x, \alpha)|$ ne prend pas la valeur λS sur $]a, b[$. Sur cet intervalle $|P_r(x, \alpha)| - \lambda S$ est de signe constant (valeurs intérmédiaires) et ce signe est positif (c'est le cas en x_α). On a donc aussi

$$\forall x \in]a, b[,\ |P_r(a, \alpha)| > \lambda S$$

18. La fonction $x \mapsto P_r(x, \alpha)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a (théorème fondamental)

$$\int_{x_\alpha}^{b} \frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha)\, dx = P_r(b, \alpha) - P_r(x_\alpha, \alpha)$$

$$\int_{a}^{x_\alpha} \frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha)\, dx = P_r(x_\alpha, \alpha) - P_r(a, \alpha)$$

Sur $[a, b]$, la fonction $x \mapsto |P_r(x, \alpha)|$ ne s'annule pas (elle reste $\geq \lambda S > 0$). On a donc l'existence d'un signe ε tel que

$$\forall x \in [a, b],\ \varepsilon |P(x, \alpha)| = P(x, \alpha)$$

Les égalité précédentes deviennent

$$\int_{x_\alpha}^{b} \frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha)\, dx = \varepsilon(\lambda S - S)$$

$$\int_{a}^{x_\alpha} \frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha)\, dx = \varepsilon(S - \lambda S)$$

On en déduit alors (en passant au module) que

$$(1 - \lambda)S \leq \int_{x_\alpha}^{b} \left| \frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha) \right|\, dx$$

$$(1 - \lambda)S \leq \int_{a}^{x_\alpha} \left| \frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha) \right|\, dx$$

et, en sommant,

$$0 \leq 2(1 - \lambda)S \leq \int_{a}^{b} \left| \frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha) \right|\, dx$$

On élève au carré (opération croissante sur $\mathbb{R}^+$) et on utilise l'inégalité (1) avec $p = q = 2$ et $u = 1$ (c'est à dire Cauchy-Schwarz) pour obtenir

$$(2(1 - \lambda)S)^2 \leq \left(\int_a^b dx \right) \left(\int_a^b \left| \frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha) \right|^2 dx \right) = (b - a) \int_a^b \left| \frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha) \right|^2 dx$$

19. On a

$$\frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha) = -\sum_{k=1}^{n} r_k \sin(kx - \alpha_k)$$

Le calcul de l'intégrale du carré de cette quantité se fait comme en question 12 et on obtient :

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha) \right|^2 dx = \pi \sum_{k=1}^{n} k^2 r_k^2$$

Par périodicité, l'intégrale sur $[0, 2\pi]$ vaut celle sur $[a, a + 2\pi]$ et, par positivité, elle est plus petite que celle sur $[a, b]$. On a finalement

$$\int_a^b \left| \frac{\partial P_r}{\partial x}(x, \alpha) \right|^2 dx \leq \pi \sum_{k=1}^{n} k^2 r_k^2$$

4 Majoration.

20. En combinant les questions 18 et 19, il vient

$$4S^2(1 - \lambda)^2 \leq (b - a)\pi \sum_{k=1}^{n} k^2 r_k^2$$

La question 14 donne alors

$$2\|r\|^2(1 - \lambda)^2 \leq (b - a)\pi \sum_{k=1}^{n} k^2 r_k^2$$

Par ailleurs, On a

$$I_t(\tilde{\alpha}) = \int_0^{2\pi} |P_r(x, \tilde{\alpha})|^{2t} \, dx$$

Comme en question 19, la périodicité et la positivité donne

$$I_t(\tilde{\alpha}) \geq \int_a^b |P_r(x, \tilde{\alpha})|^{2t} \, dx$$

Par définition de a et b, on a alors (minoration grossière)

$$I_t(\tilde{\alpha}) \geq (b-a)(\lambda S)^{2t}$$

On a ainsi prouvé que

$$\frac{2}{\pi} \frac{\|r\|^2}{\sum_{k=1}^n k^2 r_k^2} (1-\lambda)^2 \leq (b-a) \leq I_t(\tilde{\alpha})(\lambda S)^{-2t}$$

21. La double inégalité précédente donne (en notant ϕ la fonction de la question 1)

$$\forall \lambda \in [0,1], \ \phi(\lambda) S^{2t} \leq \frac{\pi}{2} \frac{\sum_{k=1}^n k^2 r_k^2}{\|r\|^2} I_t(\tilde{\alpha})$$

On utilise la valeur de λ qui maximise ϕ et on utilise la question 11 pour majorer $I_t(\tilde{\alpha})$:

$$\left(\frac{2t}{1+t}\right)^{2t} \frac{1}{(1+t)^2} S^{2t} \leq \pi^2 \left(\sum_{k=1}^n k^2 r_k^2\right) \|r\|^{2t-2} (2t-1)^t$$

Par croissance de l'élévation à la puissance $1/t$ sur $\mathbb{R}^+$, on a alors

$$S^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n k^2 r_k^2\right)^{1/t} \|r\|^{2-2/t} \pi^{2/t} (2t-1) \left(\frac{1+t}{2t}\right)^2 (1+t^2)^{2/t}$$

$t \mapsto 2\pi^{2/t} \left(\frac{1+t}{2t}\right)^2 (1+t^2)^{2/t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et tend vers $1/2$ en $+\infty$. C'est donc une fonction bornée sur $[1, +\infty[$. Soit A un majorant (il est indépendant de tout). On a alors

$$S^2 \leq At \left(\sum_{k=1}^n k^2 r_k^2\right)^{1/t} \left(\sum_{k=1}^n r_k^2\right)^{1-1/t}$$