MINES PSI 2007
un corrigé

1 Préliminaires.

1. Soient $M \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{N}_{r,m}(\mathbb{K})$; on note $A = MN \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. On a (avec l'inégalité triangulaire)

$$\forall i \in [1..n],\ \sum_{j=1}^{m} |A(i,j)| = \sum_{j=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{r} M(i,k)N(k,j) \right| \leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} |M(i,k)|.|N(k,j)|$$

Les sommes étant indépendantes on peut les intervertir et on obtient

$$\forall i \in [1..n],\ \sum_{j=1}^{m} |A(i,j)| \leq \sum_{k=1}^{r} \left(|M(i,k)| \sum_{j=1}^{m} |N(k,j)| \right)$$

Par définition de $\|.\|$, $\sum_{j=1}^{m} |N(k,j)|$ est plus petit que $\|N\|$ pour tout k. Multiplier par $|M(i,j)| \geq 0$ ne change pas le sens de l'inégalité et ainsi

$$\forall i \in [1..n],\ \sum_{j=1}^{m} |A(i,j)| \leq \|N\| \sum_{k=1}^{r} |M(i,k)|$$

Par définition de $\|.\|$, $\sum_{k=1}^{r} |M(i,k)|$ est plus petit que $\|M\|$ pour tout i. Multiplier par $\|N\| \geq 0$ ne change pas le sens de l'inégalité et finalement

$$\forall i \in [1..n],\ \sum_{j=1}^{m} |A(i,j)| \leq \|M\|\|N\|$$

Ceci étant vrai pour tout i, un passage au maximum donne

$$\|A\| = \|MN\| \leq \|M\|.\|N\|$$

2. P étant stochastique $PJ_n = J_n$ ce qui signifie que la somme des éléments de chaque ligne de P vaut 1. Ces éléments étant positifs, on a donc

$$\forall i \in [1..n],\ \sum_{j=1}^{n} |P(i,j)| = \sum_{j=1}^{n} P(i,j) = 1$$

En passant au maximum, on a donc

$$\|P\| = 1$$

3. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. On a alors $ABJ_n = AJ_n = J_n$ et donc AB est stochastique. On montre alors par récurrence que si P est stochastique alors, P^k est stochastique pour tout $k \geq 1$.

- C'est vrai par hypothèse si $k = 1$.
- Soit $k \geq 1$ tel que P^k soit stochastique. On a alors $P^{k+1} = P^k P$ qui est stochastique comme produit de deux telles matrices.

2 Pseudo-inverse.

4. On a toujours $\mathrm{Im}(a^2) \subset \mathrm{Im}(a)$.
Supposons que A possède un pseudo-inverse A'. La propriété (2) donne alors, compte-tenu de $AA' = A'A$, $A = A^2A'$ et donc $\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Im}(a^2)$.
On a donc l'égalité des images de a et de a^2 et ainsi

$$\mathrm{rang}(a^2) = \mathrm{rang}(a)$$

5. Comme $\mathrm{Im}(a^2) \subset \mathrm{Im}(a)$ (toujours vrai), l'hypothèse d'égalité des rangs de a et a^2 donne en fait l'égalité des images.
Soit $x \in \mathbb{R}^n$. $a(x) \in \mathrm{Im}(a) = \mathrm{Im}(a^2)$ et il existe donc z tel que $a(x) = a^2(z)$. On a alors $a(x - a(z)) = 0$ c'est à dire $x - a(z) \in \mathrm{Ker}(a)$. Finalement,

$$x = (x - a(z)) + a(z) \in \mathrm{Ker}(a) + \mathrm{Im}(a)$$

On a prouvé que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(a) + \mathrm{Im}(a)$ (inclusion réciproque immédiate...). Or, par théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(a)) + \dim(\mathrm{Im}(a)) = \dim(\mathbb{R}^n)$ et donc

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(a) \oplus \mathrm{Im}(a)$$

6. D'après le théorème du rang, a induit un isomorphisme d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(a)$ dans $\mathrm{Im}(a)$. Ici, $\mathrm{Im}(a)$ est lui même un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(a)$.
Soit $\mathcal{B}$ une base obtenue en concaténant une base de $\mathrm{Im}(a)$ et une base de $\mathrm{Ker}(a)$. Ces deux sous-espaces étant stables par a (on vient de le voir pour l'image et c'est évident pour le noyau), la matrice de a dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit (par blocs) $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où B et C sont les matrices des restrictions de a à $\mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{Ker}(a)$ (dans le bout de base correspondant). La remarque du début de question donne que B est inversible (de taille $r = \dim(\mathrm{Im}(a))$) et, part définition du noyau, $C = 0$.
En notant W la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a donc (formule de changement de bases)

$$A = W \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1},\ W \in GL_n(\mathbb{R}),\ B \in GL_r(\mathbb{R})$$

7. On pose

$$A = W \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Des produits par blocs donnent

$$AA' = A'A = W \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$$

$$AA'A = W \begin{pmatrix} BB^{-1}B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W = A$$

$$A'AA' = W \begin{pmatrix} B^{-1}BB^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W = A'$$

et A' est un pseudo-inverse de A.

8. Commençons par les stabilités de $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ par a'.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(a)$; on a (propriété (1)) $a(a'(x)) = a'(a(x) = a'(0) = 0$ et donc $a'(x) \in \mathrm{Ker}(a)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(a)$ est stable par a'. Notons que (propriété (3))

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(a),\ a'(x) = a'(a(a'(x))) = 0$$

a' agit donc comme l'application nulle sur $\mathrm{Ker}(a)$.

- Soit $x \in \mathrm{Im}(a)$; il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = a(y)$. D'après la propriété (1), $a'(x) = a'(a(y)) = a(a'(y)) \in \mathrm{Im}(a)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(a)$ est stable par a'.

Par formule de changement de base, $W^{-1}A'W$ est la matrice de a' dans la base $\mathcal{B}$ de la question 6. Comme dans cette question, cette matrice s'écrit $\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ où D et E sont les matrices des restrictions de a' à $\mathrm{Im}(a)$ et $\mathrm{Ker}(a)$ (dans le bout de base correspondant). Enfin, $E = 0$ puisque a' agit donc comme l'application nulle sur $\mathrm{Ker}(a)$. Finalement,

$$A' = W \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}$$

9. D'après la propriété (2) (et en multipliant par A' à droite)

$$(AA')^2 = AA'$$

Ceci montre que $a \circ a'$ est un projecteur.
Les propriétés (2) et (1) indiquent que $A = A'A^2$ et donc $\mathrm{Im}(a) \subset \mathrm{Im}(a')$. De même (3) et (1) indiquent que $\mathrm{Im}(a') \subset \mathrm{Im}(a)$. On a alors

$$\mathrm{Im}(a \circ a') = a(\mathrm{Im}(a')) = a(\mathrm{Im}(a)) = \mathrm{Im}(a)$$

la dernière égalité provenant de la question 6 (a réalise une bijection de $\mathrm{Im}(a)$ dans lui même). Par théorème du rang, $\mathrm{Ker}(a \circ a')$ et $\mathrm{Ker}(a)$ ont alors même dimension. Or, d'après ce qui précède, $\forall x \in \mathrm{Ker}(a),\ a \circ a'(x) = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(a) \subset \mathrm{Ker}(a \circ a')$. Par dimension cette inclusion est une égalité.
$a \circ a'$ est alors la projection sur $\mathrm{Im}(a \circ a') = \mathrm{Im}(a)$ de direction $\mathrm{Ker}(a \circ a') = \mathrm{Ker}(a)$.
$W^{-1}AA'W$ est la matrice de $a \circ a'$ dans une base adaptée à $\mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$ et ainsi

$$W^{-1}AA'W = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Un produit par blocs donne aussi

$$W^{-1}AA'W = \begin{pmatrix} BD & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $D = B^{-1}$. A' est donc parfaitement déterminée à partir de A et on a unicité (si existence) d'un pseudo-inverse.

3 Calcul de X_∞.

Remarque : l'énoncé définit u_c comme l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que

$$u_c(x + iy) = u(x) + iu(y)$$

Ceci n'est pas tout à fait clair car $\mathbb{C}^n$ peut être considéré comme $\mathbb{C}$-espace ou comme $\mathbb{R}$-espace.
Si on le considère comme un $\mathbb{R}$-espace, la linéarité est immédiate (elle découle de celle de u).
Si on le considère comme un $\mathbb{C}$-espace, il y a un calcul à faire pour vérifier la linéarité. Soit $z \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ un complexe (avec λ_1, λ_2 réels). On peut décomposer de façon unique z sous la forme $x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}^n$ et alors

$$u_c(\lambda z) = u_c\left((\lambda_1 x - \lambda_2 y) + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y)\right) = u((\lambda_1 x - \lambda_2 y)) + i(\lambda_2 x + \lambda_1 y)$$

On utilise alors la linéarité de u puis un nouveau calcul "dans l'autre sens" popur obtenir

$$u_c(\lambda z) = (\lambda_1 + i\lambda_2)(u(x) + iu(y)) = \lambda u_c(z)$$

De façon plus simple, on a aussi $u_c(z + z') = u_c(z) + u_c(z')$. Finalement, u_c est aussi $\mathbb{C}$-linéaire.
C'est cette dernière interprétation que l'on choisira dans la suite.

11. On a
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ a_c^2(x+iy) = a_c(a(x)+ia(y)) = a^2(x) + ia^2(y) = (a^2)_c(x+iy)$$
On a donc
$$a_c \circ a_c = (a^2)_c$$

12. Dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, la matrice de u_c est A (formellement, les bases canoniques du $\mathbb{C}$-espace $\mathbb{C}^n$ et du $\mathbb{R}$-espace $\mathbb{R}^n$ sont les mêmes...). En nous invitant à considérer a_c et non a, l'énoncé semble nous inciter à considérer A comme une matrice complexe. En tant que matrice complexe, A est trigonalisable. Les valeurs propres de A sont les $1-\lambda$ où λ est valeur propre de P. Comme P admet 1 comme valeur propre simple (en vertu du théorème admis par l'énoncé), A admet 0 comme valeur propre simple. Quitte à permuter les vecteurs d'une base de trigonalisation, on trouve une base $\mathcal{C}$ telle que
$$Mat(a_c, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & ? \\ 0 & T \end{pmatrix}$$
où T est une matrice triangulaire sans 0 sur la diagonale et donc une matrice inversible. a_c est alors de rang $n-1$ et il en est de même de a_c^2 puisque
$$Mat(a_c^2, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & ? \\ 0 & T^2 \end{pmatrix}$$
Ainsi, on a
$$(*)\ :\ \mathrm{rang}(a_c) = \mathrm{rang}(a_c^2) = n-1$$
Comme $\mathrm{Im}(a_c^2) \subset \mathrm{Im}(a_c)$, par dimension, on a
$$a_c^2(\mathbb{C}^n) = \mathrm{Im}(a_c^2) = \mathrm{Im}(a_c) = a_c(\mathbb{C}^n)$$

13. Le rang d'un endomorphisme étant celui d'une matrice le réprésentant, la relation $(*)$ donne $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^2) = n-1$ et donc
$$\mathrm{rang}(a) = \mathrm{rang}(a^2) = n-1$$

14. En écrivant que $C = I_n - (I_n - C)$, on a
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j\right) C = \left(\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j\right) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^{j+1}\right)$$
Un télescopage apparaît et ceci se simplifie en
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left(\sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j\right) C = (I_n - C)^0 - (I_n - C)^k = I_n - (I_n - C)^k$$
En multipliant par C^{-1} à droite, on obtient finalement
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=0}^{k-1} (I_n - C)^j = \left(I_n - (I_n - C)^k\right) C^{-1}$$

15. On procède par récurrence sur k.
- On a
$$(I_n - P)A' + (I_n - AA') = AA' + I_n - AA' = I_n = \sum_{j=0}^{k-1} P^j$$

La relation proposée par l'énoncé est vraie au rang $k = 1$.

- Supposons la relation vraie jusqu'à un rang $k \geq 1$. On a alors

$$\sum_{j=0}^{k} P^j = I_n + P\sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n + P(I_n - P^k)A' + kP(I_n - AA')$$

Comme $P = I_n - A$, on a aussi

$$P(I_n - P^k)A' = (P - P^{k+1})A' = (I_n - P^{k+1})A' - AA'$$

$$P(I_n - AA') = I_n - AA' - A + AAA' = I_n - AA' \quad \text{car} \quad AAA' = AA'A = A$$

En regroupant ces égalités, on a donc

$$\sum_{j=0}^{k} P^j = (I_n - P^{k+1})A' + (k+1)(I_n - AA')$$

ce qui prouve le résultat au rang $k+1$.

16. D'après la question précédente,

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j - (I_n - AA') = \frac{1}{k}(I_n - P^k)A'$$

En passant à la norme, et avec les préliminaires,

$$\left\| \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j - (I_n - AA') \right\| \leq \frac{1}{k}\left(\|I_n\| + \|P^k\|\|A'\|\right) = \frac{1+\|A'\|}{k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$$

On a donc prouvé que, au sens de $\|.\|$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j = I_n - AA'$$

17. L'application $M \mapsto MJ_n$ est continue (linéaire en dimension finie). On a donc

$$(I_n - AA')J_n = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} P^j J_n = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}(kJ_n) = J_n$$

et $I_n - AA'$ est stochastique.
Par ailleurs, $(I_n - AA')A = A - AA'A = A - A = 0$.

18. D'après la partie II, AA' est la matrice de la projection sur $\mathrm{Im}(A)$ de direction $\mathrm{Ker}(A)$. $I_n - AA'$ est donc la matrice de la projection sur $\mathrm{Ker}(A)$ de direction $\mathrm{Im}(A)$. En particulier, toutes les lignes de $I_n - AA'$ sont colinéaires. Comme $I_n - AA'$ est stochastique, le coefficient de proportionalité entre les lignes vaut 1 et toutes les lignes de $I_n - AA'$ sont égales et égale à un élément L de $\mathcal{K}_n$: $I_n - AA' = J_nL$.
Par ailleurs, $M \mapsto X_\infty$ étant continue, on a

$$X_\infty(I_n - AA') = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} X_\infty P^j$$

Par définition, $X_\infty P = X_\infty$ et, par récurrence immédiate, $\forall j,\ X_\infty P^j = X_\infty$. On a ainsi

$$X_\infty(I_n - AA') = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} X_\infty = X_\infty$$

Compte-tenu de l'expression de $I_n - AA'$, ceci donne

$$X_\infty J_n L = X_\infty$$

X_∞ étant stochastique, $X_\infty J_n = 1$ et donc $L = X_\infty$. On a alors prouvé que

$$I_n - AA' = J_n L = J_n X_\infty$$