Mines 2006 -PSI
seconde épreuve : corrigé

Partie I.

1. Soit A une matrice positive. $B = {}^tMAM$ est symétrique (${}^tB = {}^tM{}^tAM = B$) et

$$(BX|X) = (AMX|MX) = (AY|Y) \text{ avec } Y = MX$$

et cette quantité est positive par hypothèse sur A. B est donc symétrique positive.

2. On suppose A symétrique positive. On montre par récurrence que la proposition "A^k est positive" est vraie pour tout entier k.

   - $A^0 = I_n$ est symétrique et $(A^0X|X) = (X|X) = \sum x_i^2 \geq 0$. La propriété est vraie pour $k = 0$. Elle est aussi vraie au rang 1 par hypothèse sur A.
   - Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $k \geq 1$. On a alors

   $$A^{k+1} = AA^{k-1}A = {}^tAA^{k-1}A$$

   et l'hypothèse au rang $k-1$ ainsi que la question précédente donnent A^{k+1} symétrique positive.

   Remarque : on aurait aussi pu commencer par la question suivante avant de traiter celle ci puisque les valeurs propres de A^k sont les puissances k-ième de celles de A.

3. On rappelle qu'une matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = {}^tPDP$. Les coefficients diagonaux d_i de D sont alors les valeurs propres de A et on a

$$(AX|X) = (DPX|PX) = (DY|Y) = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i^2 \text{ avec } Y = PX$$

   - Si les d_i sont tous positifs alors $(AX|X)$ est positif comme somme de quantités positives. Réciproquement, si $\exists i/\ d_i < 0$ alors pour $X = P^{-1}e_i$ (i-ème vecteur de la base canonique) on a $X \neq 0$ et $(AX|X) = d_i < 0$. A est donc positive ssi ses valeurs propres sont positives.
   - Si $\forall i,\ d_i > 0$ alors $(AX|X) = 0$ entraîne $Y = 0$ (une somme de quantités positives n'est nulle que si chaque quantité l'est) et donc $X = 0$ (P étant inversible). Réciproquement, si $\exists i/\ d_i < 0$ alors pour $X = P^{-1}e_i$ on a $X \neq 0$ et $(AX|X) = d_i \leq 0$. A est donc définie positive ssi ses valeurs propres sont strictement positives.

4. Comme ci-dessus, $A = {}^tPDP$ avec P orthogonale et $D = diag(d_i)$ diagonale à coefficients diagonaux > 0. Si on pose $\Delta = diag(\sqrt{d_i})$ et $C = {}^tP\Delta P$ alors C est symétrique et ses valeurs propres sont les $\sqrt{d_i} > 0$ (Cest semblable à Δ puisque $P^{-1} = {}^tP$). Ainsi C est symétrique définie positive.

5. Soit μ une valeur propre de C (on notera $sp(C)$ le spectre de C) et X un vecteur propre associé. On a alors $AX = C^2X = \mu^2X$. On a donc

$$(*)\ :\ \forall \mu \in sp(C),\ \ker(C - \mu I_n) \subset \ker(A - \mu^2 I_n)$$

   Les valeurs propres de C étant strictement positives ont des carrés deux à deux distincts et, les sous-espaces propres d'une matrice étant en somme directe, on a donc

$$\bigoplus_{\mu \in sp(C)} \ker(C - \mu I_n) \subset \bigoplus_{\mu \in sp(C)} \ker(A - \mu^2 I_n)$$

C étant diagonalisable le membre de gauche est égal à $\mathbb{R}^n$. Le membre de droite étant inclus dans $\mathbb{R}^n$ on a donc

$$\bigoplus_{\mu\in sp(C)} \ker(C-\mu I_n) = \bigoplus_{\mu\in sp(C)} \ker(A-\mu^2 I_n) = \mathbb{R}^n$$

De plus, les inclusions dans $(*)$ sont nécessairement des égalités (sinon, on obtiendrait une inclusion stricte en prenant la somme directe).
Finalement, les valeurs propres de A sont les carrés de celles de C et on a égélité des sous-espaces propres correspondants. On peut écrire cela

$$sp(C) = \{\sqrt{\lambda}/\ \lambda \in sp(A)\} \text{ et } \forall\lambda \in sp(A),\ \ker(C-\sqrt{\lambda}I_n) \subset \ker(A-\lambda I_n)$$

6. D'après la question précédente, si $C^2 = A$ alors C agit comme une l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda}$ sur $\ker(A-\lambda I_n)$. Les sous-espaces propres de A étant supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$, C est ainsi parfaitement caractérisée (comme une application linéaire sur une famille de supplémentaires). Il y a unicité si existence de C et on a exhibé une solution. C'était donc l'unique solution et la façon dont l'a construite nous indique que C est diagonalisable dans une base orthonormée diagonalisant A.

7. Soit A définie positive. 0 n'est pas valeur propre de A (question 3) et A est donc inversible. A^{-1} et symétrique (comme A) et définie positive (ses valeurs propres, les inverses de celles de A, sont strictement positives). $A^{1/2}$ est elle aussi définie positive (ses valeurs propres sont les racines carrées de celles de A). Si on pose $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$ on a une matrice symétrique définie positive et
$$A^{-1/2}A^{-1/2} = ((A^{1/2})^2)^{-1} = A^{-1}$$
L'unicité d'une telle matrice $A^{-1/2}$ a été justifiée en question 6.

8. Il a été justifié ci-dessus que
$$A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$$

Partie II.

9. On a trois propriétés à vérifier.
   - $A - A = 0_n$ est symétrique positive et donc $A \preceq A$. La relation $\preceq$ est réflexive.
   - Si $A \preceq B$ et $B \preceq C$ alors $B - A$ et $C - B$ sont positive. La somme de deux matrices positives étant positive $(((M+N)X|X) = (MX|X) + (NX|X))$, $C - A$ est positive et $A \preceq C$. La relation $\preceq$ est transitive.
   - Si $A \preceq B$ et $B \preceq A$ alors $M = B - A$ et $-M$ sont positives. Les valeurs propres de $-M$ étant les opposées de celles de M, ces valeurs propres sont négatives (M positive) et positives ($-M$ positive). M est donc diagonalisable et 0 est sa seule valeur propre. Ainsi $M = 0$. La relation $\preceq$ est antisymétrique.

10. Si $B - A$ est positive alors ${}^tC(B-A)C$ l'est aussi (question 1) et donc ${}^tCAC \preceq {}^tCBC$.

11. Les valeurs propres de $A - I_n$ sont celles de de A auxquelles on retranche 1. Si $I_n \preceq A$ alors les valeurs propres de A sont donc plus grandes que 1. En particulier A est inversible ($0 \notin sp(A)$). De plus, les valeurs propres de A^{-1} sont dans $]0,1]$ et celles de $I_n - A^{-1}$ sont donc positive. On en déduit que $A^{-1} \preceq I_n$.

12. On suppose $0_n \prec A \preceq B$. On a alors A qui est définie positive et qui s'écrit donc $A = A^{1/2}A^{1/2}$. $A^{1/2}$ est inversible d'inverse $A^{-1/2}$. Cette matrice est symétrique et la question 10 donne

$$A^{-1/2}AA^{-1/2} \preceq A^{-1/2}BA^{-1/2}$$

D'après la question 8, $A^{-1/2}AA^{-1/2} = I_n$ et la question précédente indique alors que $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ est inversible. $A^{-1/2}$ l'étant aussi, B est encore inversible et $(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{-1} = A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$. La question précédente indique aussi que

$$A^{1/2}B^{-1}A^{1/2} \preceq I_n$$

En utilisant la question 9 avec $C = A^{-1/2}$, on a finalement

$$B^{-1} \preceq A^{-1}$$

13. Les valeurs propres de D sont les racines de $X^2 - (a+c)X + (ac - b^2)$. Le produit des valeurs propres vaut $ac - b^2$ et les valeurs propres ont même signe si ce produit est positif. Le signe est alors donné par celui de $a + c$. La CNS cherchée est donc $\begin{cases} ac - b^2 \geq 0 \\ a + c \geq 0 \end{cases}$.

14. On exploite la question précédente au brouillon ce qui amène à choisir

$$a = \frac{1}{4},\ b = \frac{1}{2}$$

On a alors

$$D = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix},\ B - D = \begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix},\ B^2 - D^2 = \begin{pmatrix} -1/16 & -5/8 \\ -5/8 & 11/4 \end{pmatrix}$$

Trace et déterminant de D et $B - D$ sont positifs et on a donc $0_n \preceq D \preceq B$. Le déterminant de $B^2 - D^2$ est lui < 0 et donc $D^2 \not\preceq B^2$.

Partie III.

15. On a $MX = \lambda X$ et donc $\Delta P^{-1}X = \lambda P^{-1}X$. Posons $Y = P^{-1}X = (y_1, \dots, y_n)$. $\Delta Y = \lambda Y$ donne

$$\forall i,\ (\lambda_i - \lambda)y_i = 0$$

Les coordonnées de $Z = f(\Delta)Y$ valent $z_i = f(\lambda_i)y_i$. Comme $y_i = 0$ ou $\lambda_i = \lambda$, on a toujours $z_i = f(\lambda)y_i$ et donc $Z = f(\lambda)Y$. Ainsi,

$$RX = Pf(\delta)P^{-1}X = Pf(\delta)Y = PZ = f(\lambda)PY = f(\lambda)X$$

16. Notons $R_P = Pf(\Delta_P)P^{-1}$ et $R_Q = Qf(\Delta_Q)Q^{-1}$. La question précédente indique que si $MX = \lambda X$ alors $R_pX = R_QX = f(\lambda)X$. R_p et R_Q agissent donc de la même façon sur les vecteurs propres de M. Comme il existe une base de $\mathbb{R}^n$ de tels vecteurs propres, on a donc $R_P = R_Q$.

17. *Remarque : si $\varphi \in E$ alors pour tout $t \geq 0$, $s \mapsto \frac{st}{1+st}\varphi(s)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, équivalente à $s \mapsto ts\varphi(s)$ en 0 et à φ en l'infini. C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et L_φ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$. Elle est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.*
φ_r est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs positives. En l'infini, φ est intégrable si et seulement si $r > 0$. En 0, $s\varphi(s) = s^{-r}$ est intégrable si et seulement $r < 1$. On a donc

$$\varphi_r \in E \iff r \in]0, 1[$$

Dans ce cas, on a (en posant $u = st$)

$$\forall t > 0,\ L_{\varphi_r}(t) = t^r L_{\varphi_r}(1)$$

18. A étant symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée. Il existe donc une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale et alors

$$f_s(A) = Pf_s(D)P^{-1}$$

Notons d_i les coefficients diagonaux de D. On remarque que

$$f_s(D) = I_n - diag((1 + sd_i)^{-1}) = I_n - diag(1 + sd_i)^{-1} = I_n - (I_n + sD)^{-1}$$

Ainsi, on a

$$f_s(A) = I_n - P(I_n + sD)^{-1}P^{-1} = I_n - (I_n + sPDP^{-1})^{-1} = I_n - (I_n + sA)^{-1}$$

19. Soient A et B des matrices symétriques telles que $0 \preceq A \preceq B$ etg $s \geq 0$. $B - A$ étant positive, $s(B-A)$ l'est aussi et donc $(I_n + sB) - (I_n + sA)$ l'est aussi. En outre $I_n + sA$ est définie positive (ses valeurs propres sont supérieures à 1...) et donc

$$0 \prec I_n + sA \preceq I_n + sB$$

La question 12 donne alors

$$(I_n + sB)^{-1} \preceq (I_n + sA)^{-1}$$

On a donc $f_s(B) - f_s(A) = (I_n + sA)^{-1} - (I_n + sB)^{-1}$ qui est positive c'est à dire $f_s(A) \preceq f_s(B)$. On a donc montré que $_s$ est matriciellement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

20. Soient P une matrice orthogonale et $D = diag(d_i)$ telles que $A = P^{-1}DP = {}^tPDP$. Par définition, on a

$$(L_\varphi(A)X|X) = ({}^tPL_\varphi(D)PX|X) = (L_\varphi(D)PX|PX)$$

Soit $Y = PX = (y_1, \dots, y_n)$. On a alors

$$(L_\varphi(A)X|X) = \sum_{i=1}^n L_\varphi(d_i)y_i^2 = \sum_{i=1}^n \int_0^{+\infty} f_s(d_i)y_i^2\varphi(s)\,ds$$

On permute somme et intégrale par linéarité de l'intégrale (la somme est finie) et on interprète alors la somme comme un produit scalaire :

$$(L_\varphi(A)X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)(f_s(D)Y|Y)\,ds$$

Comme $f_s(D) = Pf_s(A)^tP$ et $Y = PX$ on a donc

$$(L_\varphi(A)X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)(Pf_s(A)X|PX)\,ds$$

et en utilisant une nouvelle fois le caractère orthogonal de P,

$$(L_\varphi(A)X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)(f_s(A)X|X)\,ds$$

21. On a donc (linéarité du produit scalaire et de l'intégrale)

$$((L_\varphi(A) - L_\varphi(B))X|X) = \int_0^{+\infty} \varphi(s)((f_s(B) - f_s(A))X|X)\,ds$$

Si $0 \prec A \preceq B$ alors $\forall s \geq 0$, $((f_s(B) - f_s(A))X|X) \geq 0$ (question 19). Comme $\varphi(s) \geq 0$ et comme l'intégrale est croissante,

$$((L_\varphi(A) - L_\varphi(B))X|X) \geq 0$$

Ainsi, $L_\varphi(A) \preceq L_\varphi(B)$ et L_φ est matriciellement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

22. Si $r \in]0,1[$ alors $L_{\varphi_r}(A) = L_{\varphi_r(1)} A^r$. On a donc

$$\forall r \in]0,1[,\ 0 \prec A \preceq B \ \Rightarrow\ L_{\varphi_r(1)} A^r \preceq L_{\varphi_r(1)} B^r$$

Comme $L_{\varphi_r(1)} > 0$, on en déduit aisément que pour $r \in]0,1[$, $x \mapsto x^r$ est matriciellement croissante sur $\mathbb{R}^+$.