Mines 2006 -PSI
première épreuve : corrigé

Partie I.

1. Soit $f_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et il y a donc des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et $+\infty$.

   - Au voisinage de 0, $f_{\alpha,\beta}(t) \sim t^{\alpha-1}$ est intégrable si et seulement si $\alpha > 0$.
   - Au voisinage de $+\infty$, $f_{\alpha,\beta}(t) = o(1/t^2)$ (par croissances comparées et car $z > 0$) et est donc intégrable.

   Finalement, $f_{\alpha,\beta} \in L^1(\mathbb{R}^+)$ si et seulement si $\alpha > 0$.

2. Soit $g_{\alpha,\beta} : t \mapsto (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$. C'est une fonction continue sur $]-1,0[$ et il y a donc des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et -1.

   - Au voisinage de 0, $g_{\alpha,\beta}(t) \sim (-t)^{\alpha-1}$ est intégrable si et seulement si $\alpha > 0$.
   - Au voisinage de -1, $g_{\alpha,\beta}(t) \sim (1+t)^{\beta-1}e^{z}$ est intégrable si et seulement si $\beta > 0$.

   Finalement, $g_{\alpha,\beta} \in L^1(]-1,0[)$ si et seulement si $\beta > 0$.

3. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres. On note $f : (z,t) \mapsto t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta}e^{-zt}$.

   - $\forall z > 0,\ t \mapsto f(z,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\alpha > 0$.
   - $\forall z > 0,\ t \mapsto \partial_1 f(z,t) = -t^{\alpha}(1+t)^{\beta}e^{-zt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - $\forall t > 0,\ z \mapsto \partial_1 f(z,t) = -t^{\alpha}(1+t)^{\beta}e^{-zt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - Pour tout $a > 0$, on a

   $$\forall z > 0,\ \forall t > 0,\ |\partial_1 f(z,t)| \le e^{-at}t^{\alpha}(1+t)^{\beta}$$

     Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ d'après la question 1.

   Le théorème s'applique et indique que $I_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ avec

   $$\forall z > 0,\ I_1'(z) = \int_0^{+\infty} -t^{\alpha}(1+t)^{\beta}e^{-zt}\,dt = -K(z)$$

   On procède de même pour I_2. On note cette fois $f : (z,t) \mapsto t^{\alpha}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$.

   - $\forall z > 0,\ t \mapsto f(z,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $\alpha > 0 > -1$.
   - $\forall z > 0,\ t \mapsto \partial_1 f(z,t) = -t^{\alpha+1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - $\forall t > 0,\ z \mapsto \partial_1 f(z,t) = -t^{\alpha+1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   - Pour tout $a > 0$, on a

   $$\forall z > 0,\ \forall t > 0,\ |\partial_1 f(z,t)| \le e^{-at}t^{\alpha+1}(1+t)^{\beta-1}$$

     Le majorant est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ d'après la question 1.

Le théorème s'applique et indique que $I_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ avec

$$\forall z > 0,\ I_2'(z) = \int_0^{+\infty} -t^{\alpha+1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ dt$$

Par ailleurs, on a

$$\forall z > 0,\ I_2(z) - K(z) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}(1-(1+t))\ dt$$

et on obtient bien

$$I_2' = I_2 - K$$

4. Une intégration par parties donne, pour $0 < a < b$

$$z\int_a^b t^{\alpha}(1+t)^{\beta}e^{-zt}\ dt = \left[-e^{-zt}t^{\alpha}(1+t)^{\beta}\right]_a^b + \int_a^b (\alpha t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta} + \beta t^{\alpha}(1+t)^{\beta-1})e^{-zt}\ dt$$

En faisant tendre a vers 0 et b vers l'infini, tous les termes admettent une limite et on obtient

$$zK(z) = \int_0^{+\infty} (\alpha t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta} + \beta t^{\alpha}(1+t)^{\beta-1})e^{-zt}\ dt = \alpha I_1(z) + \beta I_2(z)$$

5. En combinant les questions précédentes, on obtient

$$\forall z > 0,\ I'(z) = A(z)I(z) \ \text{ avec }\ A(z) = \begin{pmatrix} -\alpha/z & -\beta/z \\ -\alpha/z & 1-\beta/z \end{pmatrix}$$

6. $K = \frac{1}{z}(\alpha I_1 + \beta I_2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$(*)\ :\ zK' + K = -\alpha K + \beta(-K + I_2)$$

Cette identité montre que K est de classe $\mathcal{C}^2$ avec

$$zK'' + 2K' = -\alpha K' - \beta K' + \beta(I_2 - K)$$

$(*)$ donne une expression de βI_2 que l'on peut utiliser ci-dessus. Tout calcul fait, on obtient

$$zK'' + (2 + \alpha + \beta - z)K' - (\alpha+1)K = 0$$

7. On pourrait reprendre les mêmes arguments (si ce n'est que l'on intègre entre -1 et 0) pour justifier les dérivations sous l'intégrale et montrer que

$$J_1'(z) = -\int_{-1}^0 (-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}e^{-zt}\ dt = -L$$

$$J_2'(z) = \int_{-1}^0 (-t)^{\alpha+1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ dt = \int_{-1}^0 (-t)^{\alpha}(-t-1+1)(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\ dt = J_2(z) - L(z)$$

On opère de même une intégration par partie pour obtenir

$$zL = \alpha J_1 + \beta J_2$$

Le reste découlant de ces relations, on obtient encore que J vérifie (S) et que L vérifie la même équation différentielle que K.

Partie II.

8. La fonction $h : u \mapsto (1+u)^{\beta-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. L'inégalité des accroissements finis indique que
$$\forall t>0,\ \forall z\geq 1,\ \left|f\left(\frac{t}{z}\right)-f(0)\right|\leq \frac{t}{z}\max_{u\in[0,t/z]}|f'(u)|$$
On a $f'(u)=(\beta-1)(1+u)^{\beta-2}$.
   - Si $\beta\geq 2$, f' croît sur $\mathbb{R}^+$ et est positive. Le maximum précédent est atteint en $t/z\leq t$ et est plus petit que $f'(t)=(\beta-1)(1+t)^{\beta-2}$.
   - Si $\beta\in[1,2]$, f' décroît sur $\mathbb{R}^+$ et est positive. Le maximum précédent est atteint en 0 et vaut $\beta-1$.
   - Si $\beta\in]0,1]$, f' croît sur $\mathbb{R}^+$ et est négative. Le maximum précédent est atteint en 0 et vaut $1-\beta$.

   Les cas 2 et 3 amènent au même résultat (au signe près et cela est réglé par l'emploi d'une valeur absolue) et on a finalement
$$\forall t>0,\ \forall z\geq 1,\ \left|\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\beta-1}-1\right|\leq\left\{\begin{array}{l}\frac{t}{z}|\beta-1|(1+t)^{\beta-2}\ \text{ si }\ \beta\geq 2\\ \frac{t}{z}|\beta-1|\ \text{ si }\ 0<\beta\leq 2\end{array}\right.$$

9. Le changement de variable $u=zt$ donne
$$H(z)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\,dt=\frac{1}{z^\alpha}\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}\left(1+\frac{u}{z}\right)^{\beta-1}e^{-u}\,du$$
On a donc (on peut majorer en faisant passer les valeurs absolues dans l'intégrale car on travaille avec des fonctions intégrables)
$$|H(z)-\Gamma(\alpha)z^{-\alpha}|\leq\frac{1}{z^\alpha}\int_0^{+\infty}u^{\alpha-1}\left|\left(1+\frac{u}{z}\right)^{\beta-1}-1\right|e^{-u}\,du$$
   - Si $\beta\geq 2$ le terme sous l'intégrale est majoré par $u^{\alpha-1}e^{-u}\frac{u}{z}|\beta-1|(1+u)^{\beta-2}$. Cette fonction de u est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on a donc
$$|H(z)-\Gamma(\alpha)z^{-\alpha}|\leq\frac{1}{z^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty}u^\alpha e^{-u}|\beta-1|(1+u)^{\beta-2}\,du=o(z^{-\alpha})$$
   - Si $\beta\leq 2$ le terme sous l'intégrale est majoré par $u^{\alpha-1}e^{-u}\frac{u}{z}|\beta-1|$. Cette fonction de u est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on a donc
$$|H(z)-\Gamma(\alpha)z^{-\alpha}|\leq\frac{1}{z^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty}u^\alpha e^{-u}|\beta-1|\,du=o(z^{-\alpha})$$

   On obtient dans tous les cas $H(z)-\Gamma(\alpha)z^{-\alpha}=o(z^{-\alpha})$ et donc
$$H(z)=\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\,dt\sim\Gamma(\alpha)z^{-\alpha}$$

10. Le changement de variable $u=z(1+t)$ donne
$$\int_{-1}^{-1/2}(-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\,dt=\frac{e^z}{z^\beta}\int_0^{\frac{z}{2}}\left(1-\frac{u}{z}\right)^{\alpha-1}u^{\beta-1}e^{-u}\,du$$

11. On pourra conclure immédiatement si l'on montre que

$$\lim_{z\to+\infty} \int_0^{\frac{z}{2}} \left(1-\frac{u}{z}\right)^{\alpha-1} u^{\beta-1}e^{-u}\, du = \Gamma(\beta)$$

Pour cela, on forme la différence et on montre qu'elle est de limite nulle. Cette différence vaut $A(z)+B(z)$ avec

$$A(z) = \int_0^{\frac{z}{2}} \left(\left(1-\frac{u}{z}\right)^{\alpha-1} - 1\right) u^{\beta-1}e^{-u}\, du$$

$$B(z) = -\int_{z/2}^{+\infty} u^{\beta-1}e^{-u}\, du$$

L'intégrabilité de $u \mapsto u^{\beta-1}e^{-u}$ au voisinage de l'infini donne immédiatement $B(z) \to 0$ quand $z \to +\infty$.
La fonction $h : v \mapsto (1-v)^{\alpha-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1/2]$. Sa dérivée est bornée sur ce segment par une constante M et l'ingalité des accroissements finis donne

$$\forall t \in [0,1/2],\ |(1-t)^{\alpha-1} - 1| \le Mt$$

Quand $u \in [0,z/2]$, $u/z \in [0,1/2]$ et on a donc

$$|A(z)| \le \int_0^{\frac{z}{2}} M\frac{u}{z}u^{\beta-1}e^{-u}\, du$$

Comme $u \mapsto u^\beta e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ on peut même écrire

$$|A(z)| \le \frac{M}{z}\int_0^{+\infty} u^\beta e^{-u}\, du$$

ce qui prouve que $A(z) \to 0$ quand $z \to 0$.
On a prouvé que

$$\int_{-1}^{-1/2} (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\, dt \underset{z\to+\infty}{\sim} e^z z^{-\beta}\Gamma(\beta)$$

12. Si $t \in [-1/2, 0]$, $-zt \in [0, z/2]$ et donc

$$0 \le \int_{-1/2}^{0} (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\, dt \le e^{z/2}\int_{-1/2}^{0} (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}\, dt$$

ce terme est négligeable devant $e^z z^{-\beta}$ quand $z \to +\infty$. On obtient donc le même équivalent en ajoutant cette intégrale et celle de la question précédente (si $f \sim g$ et $h = o(g)$ alors $f + h \sim g$). On a donc

$$\int_{-1}^{0} (-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\, dt \underset{z\to+\infty}{\sim} e^z z^{-\beta}\Gamma(\beta)$$

13. Les questions précédentes donnent

$$I_1(z)J_2(z) \underset{z\to+\infty}{\sim} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)e^z z^{-\alpha-\beta}$$

$$-I_2(z)J_1(z) \underset{z\to+\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)e^z z^{-\alpha-\beta-2}$$

Le second terme étant négligeable devant le premier, la somme des deux équivaut au premier et donc

$$W(z) \underset{z\to+\infty}{\sim} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)e^z z^{-\alpha-\beta}$$

14. On connaît I_1', I_2' (resp. J_1', J_2') en fonction de I_1, I_2 (resp. J_1, J_2). On peut donc exprimer $W' = I_1'J_2 + I_1J_2' - I_2'J_1 - I_2J_1'$ en fonction de I_1, I_2, J_1, J_2. Tout calcul (au brouillon) fait on obtient

$$\forall z > 0,\ W'(z) = \left(1 - \frac{\alpha+\beta}{z}\right) W(z)$$

15. En résolvant l'équation précédente, on obtient l'existence d'une constante a telle que

$$\forall z > 0,\ W(z) = a\frac{e^z}{z^{\alpha+\beta}}$$

En regardant la limite de $z^{\alpha+\beta}e^{-z}W(z)$ en l'infini, on obtient $a = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$. On a donc

$$\forall z > 0,\ W(z) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\frac{e^z}{z^{\alpha+\beta}}$$

16. W étant non nulle, les solutions I et J sont indépendantes. L'ensemble des solutions de (S) étant un espace vectoriel de dimension 2 (puisque $z \mapsto A(z)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$), il est égal à $Vect(I, J)$. La forme générale d'une solution de (S) sur $\mathbb{R}^{+*}$ est donc

$$z \mapsto \begin{pmatrix} aI_1(z) + bJ_1(z) \\ aI_2(z) + bJ_2(z) \end{pmatrix}$$

Partie III.

17. En développant par la formule du binôme (et comme chaque intégrale écrite existe)

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\,dt = \sum_{k=0}^{\beta-1}\binom{\beta-1}{k}\int_0^{+\infty} t^{k+\alpha-1}e^{-zt}\,dt$$

Par ailleurs, le changement de variable $u = zt$ donne (pour $z \neq 0$)

$$\forall j > 0,\ \int_0^{+\infty} t^j e^{-zt}\,dt = \frac{1}{z^{j+1}}\Gamma(j+1)$$

On a donc

$$\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\,dt = z^{1-\beta-\alpha}P(z) \text{ avec } P(z) = \sum_{k=0}^{\beta-1}\binom{\beta-1}{k}\Gamma(k+\alpha)z^{\beta-1-k} \in \mathbb{R}_{\beta-1}[X]$$

Le coefficient de $X^{\beta-1}$ dans P vaut $\Gamma(\alpha) \neq 0$ et P est donc de degré $\beta - 1$.

18. Si a est un entier négatif alors (u_k) est nulle à partir d'un certain rang rang et le rayon de convergence cherché est infini. Sinon, pour tout $x \neq 0$, $u_k x^k$ est non nul et

$$\frac{|u_{k+1}x^{k+1}|}{|u_k x^k|} = |x|\frac{|a+k|}{|(k+1)(b+k)|} \to 0$$

Par règle de D'Alembert, $\sum(u_k x^k)$ converge absolument. On a donc encore un rayon de convergence infini.

19. On sait que

$$\forall u \in \mathbb{R},\ e^u = \sum_{k\geq 0}\frac{u^k}{k!}$$

On en déduit donc que

$$\int_{-1}^{0}(-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\,dt=\int_{-1}^{0}\left(\sum_{k\geq 0}(-t)^{\alpha-1+k}(1+t)^{\beta-1}\frac{z^k}{k!}\right)\,dt=\int_{-1}^{0}\sum_{k\geq 0}h_k(t)\,dt$$

On veut intervertir la somme et l'intégrale. On va pour cela utiliser un théorème de cours dont nous commeçons par vérifier les hypothèses.

- Pour tout k, h_k est intégrable sur $]-1,0[$ (les puissances sont >-1 puisque $\alpha,\beta>0$).
- $\sum(h_k)$ converge simplement sur $]-1,0[$ et la somme est continue sur $]-1,0[$ (c'est $t\mapsto(-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}$).
- Le changement de variable $u=-t$ et les formules rappelées par l'énoncé donnent

  $$\int_{-1}^{0}|h_k|=\int_0^1 u^{\alpha-1+k}(1-u)^{\beta-1}\,du\frac{z^k}{k!}=\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}\frac{z^k}{k!}$$

  En itérant la relation $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$ ceci devient

  $$\int_{-1}^{0}|h_k|=\int_0^1 u^{\alpha-1+k}(1-u)^{\beta-1}\,du\frac{z^k}{k!}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\frac{(\alpha,k)z^k}{k!(\alpha+\beta,k)}$$

  On a vu plus haut que ceci est le terme général d'une série convergente.

L'interversion est licite. Le calcul précédent (h_k est positive !) donne alors

$$\int_{-1}^{0}(-t)^{\alpha-1}(1+t)^{\beta-1}e^{-zt}\,dt=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}F(\alpha,\alpha+\beta,z)$$

20. Pour les séries entières, la dérivation sous le signe somme est licite. Avec les notations de l'énoncé, on a donc (après regroupement)

$$xy''(x)+(b-x)y'(x)-ay(x)=\sum_{k\geq 0}\left((k+1)(k+b)u_{k+1}-(a+k)u_k\right)x^k$$

Par ailleurs, on vu plus haut que $\frac{u_{k+1}}{u_k}=\frac{a+k}{(k+1)(b+k)}$ et les termes ci-dessus sont donc nuls :

$$xy''(x)+(b-x)y'(x)-ay(x)=0$$

21. Soit $y(z)=z^{1-b}f(z)$. f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si y l'est et, dans ce cas, le calcul (fait au brouillon) montre que

$$xy''(x)+(b-x)y'(x)-ay(x)=x^{1-b}\left(xf''(x)+(2-b-x)y'(x)-(a+1)y(x)\right)$$

D'après la question 20 ceci est nul si $f(z)=F(a+1,2-b,z)$.