Mines-Ponts

Mathématiques PSI 2003 (2-ème épreuve) Corrigé

Première partie

1. $\mathbf{M}$ est un espace vectoriel de dimension 9. Donc $\mathbf{C}$ est de dimension 18.

2. $\mathbf{C}$ est par définition l'espace vectoriel produit cartésien de l'espace vectoriel $\mathbf{M}$ par lui-même. De plus la loi *
- est associative car

$$\begin{aligned}((P,Q)*(R,S))*(T,U) = (P.R, P.S+Q.R)*(T,U) &= (P.R.T, P.R.U+P.S.T+Q.R.T)\\ &= (P,Q)*(R.T, R.U+S.T) = (P,Q)*((R,S)*(T,U))\end{aligned}$$

- possède un élément neutre qui est le couple $(I,0)$
- est distributive à droite par rapport à l'addition car

$$((P,Q)+(R,S))*(T,U) = (P+R, Q+S)*(T,U) = ((P+R).T, (P+R).U+(Q+S).T) = (P,Q)*(T,U)+(R,S)*(T,U)$$

- est distributive à gauche par rapport à l'addition par un calcul similaire
- est compatible à la multiplication par un scalaire c'est à dire

$$\lambda((P,Q)*(R,S)) = (\lambda(P,Q))*(R,S) = (P,Q)*(\lambda(R,S)).$$

Donc $\mathbf{C}$ est bien une $\mathbb{R}$-algèbre associative unitaire.

3. On sait déjà que la loi * est associative et que son élément neutre est dans $\mathbf{G}$. De plus le produit $(T,U) = (P,Q)*(R,S)$ de deux éléments de $\mathbf{G}$ vérifie $T = P.R \in SO(\mathbb{R}^3)$ et, sachant que ${}^tP.P = I$,

$${}^tT.U + {}^tU.T = {}^tR.{}^tP.(P.S+Q.R) + ({}^tS.{}^tP + {}^tR.{}^tQ).P.R = {}^tR.({}^tP.Q + {}^tQ.R).R + {}^tR.S + {}^tS.R = 0.$$

La loi * est donc interne. Enfin, le symétrique à gauche du couple (P,Q) est le couple $({}^tP, {}^tQ)$ d'après la relation définissant $\mathbf{G}$ et il suffit de multiplier cette relation à gauche par P et à droite par ${}^tQ$ pour montrer qu'il est aussi symétrique à droite. Donc $\mathbf{G}$ est un groupe.

4. $\mathbf{H}$ n'est pas vide puisqu'il contient le couple $(I,0)$, est stable par produit et par passage au symétrique. C'est donc un sous-groupe de $\mathbf{G}$; l'application $(P,0) \mapsto P$ est évidemment un isomorphisme de groupe de $\mathbf{H}$ sur $SO(\mathbb{R}^3)$.

5. $\mathbf{A}$ est formé des couples (I,Q) tels que Q soit une matrice antisymétrique ; il contient le couple $(I,0)$, est stable par produit et par passage au symétrique. C'est donc aussi un sous-groupe de $\mathbf{G}$; il est commutatif et isomorphe au groupe additif des matrices antisymétriques.

6. e étant l'élément neutre de $\mathbf{G}$,

$${}^t(P,Q)*(P,Q) = e \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}{}^tP.P = I\\ {}^tP.Q + {}^tQ.P = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}P \in O(\mathbb{R}^3)\\ {}^tP.Q + {}^tQ.P = 0\end{array}\right. .$$

En ajoutant la condition $\det(P) = 1$, on obtient l'équivalence demandée.

Deuxième partie

7. Soient $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ et $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$. Alors

$$\vec{a} \wedge \vec{x} = (a_2x_3 - a_3x_2)\vec{i} + (a_3x_1 - a_1x_3)\vec{j} + (a_1x_2 - a_2x_1)\vec{k}.$$

La matrice $P_{\vec{a}}$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}$.

8. Avec des notations analogues, la linéarité de r donne

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_2y_3 - x_3y_2)r(\vec{i}) + (x_3y_1 - x_1y_3)r(\vec{j}) + (x_1y_2 - x_2y_1)r(\vec{k}).$$

Or la base $\left(r(\vec{i}), r(\vec{j}), r(\vec{k})\right)$ étant orthonormée directe, le produit vectoriel de $r(\vec{x}) = x_1r(\vec{i}) + x_2r(\vec{j}) + x_3r(\vec{k})$ et de $r(\vec{y}) = y_1r(\vec{i}) + y_2r(\vec{j}) + y_3r(\vec{k})$ peut être calculé dans cette base ce qui redonne le résultat précédent. Donc $r(\vec{x} \wedge \vec{y}) = r(\vec{x}) \wedge r(\vec{y})$

9. $r \circ p_{\vec{a}}(\vec{x}) = r(\vec{a} \wedge \vec{x}) = r(\vec{a}) \wedge r(\vec{x}) = p_{\vec{b}} \circ r(\vec{x})$ avec $\vec{b} = r(\vec{a})$.

10. $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{u} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{u}$ puisque $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. Donc $\vec{v} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{u}$ est indépendant de M sur D. De plus $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

11. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est une solution particulière de l'équation. En effet, puisque $\|\vec{u}\| = 1$, $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{u} = \vec{v}$. Toute autre solution s'obtiendra en ajoutant à celle-ci une solution de l'équation "'homogène"' $\vec{x} \wedge \vec{u} = 0$, c'est à dire un multiple de $\vec{u}$. La solution générale est donc $\vec{x} = \vec{u} \wedge \vec{v} + \lambda\vec{u}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$.

12. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM}) \wedge \vec{u} = \vec{v}$ est donc la droite affine dirigée par $\vec{u}$ et passant par le point A tel que $\overrightarrow{OA}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

13. Pour $\vec{u} = \vec{i}$ et $\vec{v} = b\vec{j} + c\vec{k}$, $\overrightarrow{OA} = -c\vec{j} + b\vec{k}$.

14. Deux couples $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u'}, \vec{v'})$ de $\mathbf{P}$ définissent la même droite D si et seulement si $\begin{cases} \vec{u} = \varepsilon\vec{u'} \\ A' \in D \end{cases}$ soit

$$\begin{cases} \vec{u} = \varepsilon\vec{u'} \\ (\vec{u'} \wedge \vec{v'}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \varepsilon\vec{u'} \\ (\vec{u}.\vec{u'})\vec{v'} - (\vec{u}.\vec{v'})\vec{u'} = \vec{v} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = \varepsilon\vec{u'} \\ \vec{v} = \varepsilon\vec{v'} \end{cases}.$$

où ε désigne ± 1.

15. La droite $D' = r(D)$ est dirigée par le vecteur unitaire $r(\vec{u})$. Choisissons $\vec{u'} = r(\vec{u})$ et prenons $\alpha = r$. Soit A un point quelconque de D. Alors $\vec{v} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{u}$. De plus, si $A' = d(A)$, le vecteur $\vec{v'}$ est donné par $\vec{v'} = \overrightarrow{OA'} \wedge \vec{u'} = \overrightarrow{OA'} \wedge r(\vec{u})$. Or $\overrightarrow{OA'} = \vec{a} + r(\overrightarrow{OA})$. Donc $\vec{v'} = \vec{a} \wedge r(\vec{u}) + r(\overrightarrow{OA}) \wedge r(\vec{u}) = p_{\vec{a}} \circ r(\vec{u}) + r(\vec{v})$. Donc $\beta = p_{\vec{a}} \circ r$.

16. Puisque la construction précédente peut être faite à partir de n'importe quelle droite D, on doit avoir $\alpha(\vec{u}) = r(\vec{u})$ pour tout $\vec{u}$; α est donc déterminé de manière unique. Dès lors, $\beta(\vec{u}) = p_{\vec{a}} \circ r(\vec{u})$ pour tout $\vec{u}$ prouve l'unicité de β.
A est la matrice d'une rotation, donc dans $SO(\mathbb{R}^3)$. D'autre part, $B = P_{\vec{a}}.A$ d'où ${}^tA.B + {}^tB.A = {}^tA.P_{\vec{a}}.A + {}^tA.{}^tP_{\vec{a}}.A = 0$ car $P_{\vec{a}}$ est antisymétrique. Donc $(A, B) \in \mathbf{G}$.

17. La connaissance de A donc de α détermine entièrement la rotation r. Celle-ci étant inversible, la connaissance de $\beta = p_{\vec{a}} \circ r$ (ou de sa matrice)détermine entièrement $p_{\vec{a}}$ donc $\vec{a}$ (cf. 7.). Par suite, le déplacement $d$est entièrement déterminé par le couple (A, B) et l'application J est injective.

18. α est la rotation d'axe Oz et d'angle ϑ de matrice $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{a} = \overrightarrow{OO'}$ est le vecteur $\vec{j} + \vec{k}$ et on en déduit la matrice B de β:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta & -\cos\vartheta & 1 \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ -\cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{u} = \vec{i} \quad , \quad \vec{u'} = \cos\vartheta\vec{i} + \sin\vartheta\vec{j} \quad , \quad \vec{v} = y_0\vec{j} \wedge \vec{i} = -y_0\vec{k},$$

$$\vec{v'} = r(y_0\vec{j} + \vec{j} + \vec{k}) \wedge \vec{u'} = (y_0(-\sin\vartheta\vec{i} + \cos\vartheta\vec{j}) + \vec{j} + \vec{k}) \wedge (\cos\vartheta\vec{i} + \sin\vartheta\vec{j}) = -\sin\vartheta\vec{i} + \cos\vartheta\vec{j} - (y_0 + \cos\vartheta)\vec{k}.$$

On vérifie que $\alpha(\vec{v}) = -y_0\vec{k}$ d'où $\vec{v'} = \alpha(\vec{v}) - \sin\vartheta\vec{i} + \cos\vartheta\vec{j} - \cos\vartheta\vec{k} = \alpha(\vec{v}) + \beta(\vec{u})$.

19. Soit maintenant un couple $(A, B) \in \mathbf{G}$. On peut évidemment associer à la matrice $A \in SO(\mathbb{R}^3)$ une rotation r de matrice A dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La matrice $B.A^{-1} = B.{}^tA$ est antisymétrique puisque ${}^t(B.{}^tA) = A.{}^tB = A.{}^tB.A.{}^tA = -A.{}^tA.B.{}^tA = -B.{}^tA$ (on a utilisé d'abord $A^{-1} = {}^tA$ puis la définition de $\mathbf{G}$).
Elle est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix}$, c'est à dire égale à $P_{\vec{a}}$ avec $\vec{a} = -\gamma\vec{i} + \beta\vec{j} - \alpha\vec{k}$. Donc l'application J est surjective.

20. Pour que la droite associée au couple $(\vec{u}, \vec{v})$ soit invariante, il faut et il suffit que $\begin{cases} \alpha(\vec{u}) = \varepsilon\vec{u} \\ \alpha(\vec{v}) + \beta(\vec{u}) = \varepsilon\vec{v} \end{cases}$ $(\varepsilon = \pm 1)$.
$\triangleright$ *1er cas.* Si d est une translation, aucune droite n'est invariante.
$\triangleright$ *2ème cas.* Si A n'est ni la matrice I ni la matrice d'une rotation d'angle π (retournement), on doit choisir $\varepsilon = 1$. Alors D est parallèle à l'axe de rotation et $\beta(\vec{u}) = p_{\vec{a}}(\vec{u}) = \vec{a} \wedge \vec{u}$ d'où $(\alpha - id)(\vec{v}) = -\vec{a} \wedge \vec{u}$ $\quad (*)$.
$\triangleright$ *3ème cas.* Si au contraire A est pas la matrice d'un retournement, il faut ajouter aux solutions précédentes celles correspondant à $\varepsilon = -1$. Le vecteur $\vec{u}$ est alors orthogonal à l'axe de rotation, $\beta(\vec{u}) = -p_{\vec{a}}(\vec{u}) = -\vec{a} \wedge \vec{u}$ et $(\alpha + id)(\vec{v}) = -\vec{a} \wedge \vec{u}$ $\quad (**)$.
Dans le deuxième cas, $\mathrm{rg}(\alpha - id) = 2$ et $\mathrm{Im}(\alpha - id)$ est le plan orthogonal à $\vec{u}$. Il y a donc toujours une solution $\vec{v}$ de l'équation $(\alpha - id)(\vec{v}) = -\vec{a} \wedge \vec{u}$ $\quad (*)$ et cette solution est définie à addition près d'un vecteur porté par l'axe de rotation. Une seule de ces solutions est orthogonal à $\vec{u}$.
Dans le troisième cas, $\mathrm{rg}(\alpha + id) = 1$ et $\mathrm{Im}(\alpha + id)$ est l'axe de la rotation. L'équation $(\alpha + id)(\vec{v}) = -\vec{a} \wedge \vec{u}$ $\quad (**)$ ne peut donc avoir de solution que si $\vec{a}$ est dans le plan orthogonal à l'axe de rotation et la solution est alors définie à l'addition près d'un vecteur de ce plan. Parmi ces solutions, un sous-espace affine de dimension 1 est formé des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$.

21. Si $\vartheta \neq 0 \pmod{\pi}$, on doit prendre $\vec{u} = \vec{k}$ (au signe près) et l'unique vecteur $\vec{v}$ cherché, de la forme $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ doit vérifier

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta - 1 & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2 - 2\cos\vartheta} \begin{pmatrix} \cos\vartheta - 1 & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sin\vartheta}{2(1 - \cos\vartheta)}\vec{j}.$$

Si $\vartheta = \pi \pmod{2\pi}$, il n'y a pas d'autre droite invariante car $\vec{a} = \vec{j} + \vec{k}$ n'est pas orthogonal à l'axe de rotation.
Si $\vartheta = 0 \pmod{2\pi}$, d est une translation et il n'existe aucune droite invariante.