Mines-Ponts 2002, PSI — épreuve 2 (3h) — corrigé

PARTIE I
Exemples, résultats généraux
Remarquons tout d'abord que E est une équation linéaire d'ordre 2 et que E_0 est l'équation "sans second membre" associée. On sait que l'espace des solutions de E est un espace affine de dimension 2 dont la direction est l'espace vectoriel des solutions de E_0.
La condition C n'est pas une condition *à la Cauchy*, de sorte que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas aux problèmes P_0 et P.

Question I.1
Exemples

I.1.a. E s'écrit ici $-u''=1$, les solutions de E sur I sont les $u : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$, où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Ajoutant la condition C, on obtient l'unique solution du problème $P : u : x \mapsto \dfrac{x(1-x)}{2}$.

I.1.b. E s'écrit ici $-u''+u=e^{\alpha x}$. On résout d'abord l'équation homogène $E_0 : -u''+u=0$, l'espace des solutions est $\{u : x \mapsto a\operatorname{ch}x+b\operatorname{sh}x, (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.
Trois cas sont à considérer : si $\alpha\neq\pm1$, une solution particulière de E est $u : x \mapsto \dfrac{1}{1-\alpha^2}e^{\alpha x}$. Ajoutant la condition C, on obtient l'unique solution du problème $P : u : x \mapsto \dfrac{1}{1-\alpha^2}(e^{\alpha x}-\operatorname{ch}x-\dfrac{e^{\alpha}-\operatorname{ch}1}{\operatorname{sh}1}\operatorname{sh}x)$.
Si $\alpha=1$, une solution particulière de E est $u : x \mapsto -\dfrac{x}{2}e^x$. Ajoutant la condition C, on obtient l'unique solution du problème $P : u : x \mapsto \dfrac{e^2}{e^2-1}\operatorname{sh}x-\dfrac{xe^x}{2}$.
Si $\alpha=-1$,une solution particulière de E est $u : x \mapsto \dfrac{x}{2}e^{-x}$. Ajoutant la condition C, on obtient l'unique solution du problème $P : u : x \mapsto -\dfrac{1}{e^2-1}\operatorname{sh}x+\dfrac{xe^{-x}}{2}$.

Question I.2
Unicité des solutions

I.2.a. Comme u est solution de E_0, $u''(x)=p(x)u(x)$ et donc $u'(x)^2+p(x)u(x)^2=u'(x)^2+u''(x)u(x)$ où on reconnaît la dérivée de $u(x)u'(x)$.
Alors $\displaystyle\int_0^1 (u'(x)^2+p(x)u(x)^2)\,dx=[u(x)u'(x)]_0^1=0$ car u vérifie la condition C.
Mais p est continue et positive sur I, de sorte que $x\mapsto u'(x)^2+p(x)u(x)^2$ est une fonction positive et continue sur I d'intégrale nulle, donc constante nulle sur cet intervalle. On en déduit que u' est constante nulle sur I, donc u constante sur I et C conclut que $u=0$.
La fonction nulle (qui est évidemment solution) est la seule solution du problème P_0.

I.2.b. Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème P, $u=u_1-u_2$ est solution du problème P_0, donc nulle, donc $u_1=u_2$: il y a bien unicité de l'éventuelle solution du problème P.

Question I.3
Existence d'une solution

I.3.a. Par linéarité, g est solution de E_0. On a bien sûr $g(0)=0$, et si on ajoute la condition $g(1)=0$, g devient une solution du problème P_0, donc $g=0$ d'après la question précédente.
g s'annule en 1 si et seulement si g s'annule sur tout I c'est-à-dire si et seulement si u_1 et u_2 sont proportionnelles. Dans le cas particulier où u_1 et u_2 forment un système fondamental de solutions de l'équation E_0, on est assuré que g ne s'annule pas en 1.

I.3.b. Pour toutes valeurs de (λ,μ), la fonction u proposée est solution de l'équation E. On cherche donc à écrire matriciellement la condition C : $u(1)=u(0)=0$ se traduit par $UX=B$ où $U=\begin{pmatrix}u_1(0) & u_2(0)\\ u_1(1) & u_2(1)\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-v(0)\\ -v(1)\end{pmatrix}$.

I.3.c. Choisissant pour (u_1,u_2) un système fondamental de solutions de l'équation E_0 et pour v une solution particulière de E, ce que la théorie nous permet de faire, on a déjà dit que $\operatorname{dét}U=u_1(0)u_2(1)-u_1(1)u_2(0)\neq0$. On obtient donc un couple (λ,μ) tel que $\lambda u_1+\mu u_2+v$ est solution du problème P : c'est le résultat d'existence qui nous manquait encore.

PARTIE II
Quelques propriétés de certaines matrices de $M_n(\mathbb{R})$

Question II.1
Quelques propriétés matricielles

II.1.a. Les vecteurs images par A des vecteurs de la base canonique sont les vecteurs colonnes de la matrice. Dire que A est positive est bien équivalent à dire que tous ses vecteurs colonnes le sont.

II.1.b. L'inégalité est trivialement vérifiée si X est le vecteur nul. Sinon, notons $X' = \dfrac{1}{\|X\|}X$, qui est de norme 1. On a $\|AX'\| \leqslant N(A) = \sup\limits_{\|Y\|\leqslant 1} \|AY\|$ donc $\|AX\| = \|X\|.\|AX'\| \leqslant N(A)\|X\|$.

II.1.c. Soit A positive. Soit $X = (x_i)$ tel que $\|X\| \leqslant 1$. On a

$$\|AX\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big| \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sup_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| \leqslant \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

On en déduit qu'on a bien $N(A) = \sup\limits_{\|X\|\leqslant 1} \|AX\| \leqslant \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$.

Or $\|E\| = 1$ et $\|AE\| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant \|A\|$ d'où finalement l'égalité : $N(A) = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$.

II.1.d. Soit X un vecteur du noyau de A : $AX = 0 \geqslant 0$ donc $X \geqslant 0$ mais aussi $A(-X) = 0 \geqslant 0$ donc $-X \geqslant 0$. Finalement, $X = 0$, ce qui montre que A est injective. Comme A est une matrice carrée, son injectivité entraîne son inversibilité. Finalement, si C_j est la j-ème colonne de A^{-1} c'est que $AC_j = e_j \geqslant 0$ donc $C_j \geqslant 0$: toutes les colonnes de A^{-1} sont positives, donc A^{-1} est positive.

Question II.2
Un exemple

II.2.a. On procède selon les indications de l'énoncé, à ceci près qu'on appelle k **le plus petit** entier tel que $x_k = \min\limits_{0\leqslant i\leqslant n+1} x_i$.
On suppose que X n'est pas positif, donc $k \neq 0$, $k \neq n+1$ et $x_k < 0$.
Observons que $|x_k| = -x_k = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n+1} (-x_i) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n, x_i<0} |x_i|$.
Dire $(A+H)X \geqslant 0$ c'est écrire, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $(2+h_i)x_i \geqslant x_{i-1} + x_{i+1}$.
Quand $i = k$, on en déduit que $x_{k-1} + x_{k+1} \leqslant 0$, puis que $(2+h_k)|x_k| \leqslant |x_{k-1} + x_{k+1}| \leqslant |x_{k-1}| + |x_{k+1}| \leqslant 2|x_k|$, d'où $h_k|x_k| \leqslant 0$ et $h_k = 0$. Mais alors $|x_{k-1}| + |x_{k+1}| = 2|x_k|$ donc finalement $x_{k-1} = x_{k+1} = x_k$. C'est la contradiction attendue, puisque par définition de k, $x_{k-1} > x_k$.

II.2.b. D'après la question II.1.d, $A+H$ est inversible et son inverse $(A+H)^{-1}$ est positive. Considérant le cas particulier $H = 0$, on en déduit également que A est inversible et que A^{-1} est positive.

Question II.3
Norme de la matrice $(A+H)^{-1}$

II.3.a. D'après ce qu'on vient de dire $(A+H)^{-1} \geqslant 0$, $E \geqslant 0$ donc $V \geqslant 0$ et de même $A^{-1} \geqslant 0$ donc $W \geqslant 0$. Enfin, $A(W-V) = E - AV = (A+H)V - AV = HV = (h_iv_i)$ qui est évidemment positif aussi.

II.3.b. Appliquant II.1.a avec $H = 0$, on déduit de $A(W-V) \geqslant 0$ que $W - V \geqslant 0$. Or $V \geqslant 0$ et $W \geqslant 0$, donc finalement, $\forall i, w_i \geqslant v_i \geqslant 0$ et donc $\|W\| \geqslant \|V\|$.
Or on a vu en II.1.c que, comme $(A+H)^{-1} \geqslant 0$, $N((A+H)^{-1}) = \|(A+H)^{-1}E\| = \|V\| \leqslant \|W\|$, d'où l'inégalité valable pour tout X, d'après II.1.b : $\|(A+H)^{-1}X\| \leqslant \|W\|\|X\|$.

Question II.4
Une majoration de la norme du vecteur W

II.4.a. L'application $\begin{cases} S_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_k) \longmapsto (x_0, x_1) \end{cases}$ est clairement linéaire, injective (par une récurrence immédiate) et surjective (de la même façon). Donc S_0 est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2. Les suites (1) et (k) en forment une base donc $S_0 = \{(x_k)_{k\geqslant 0}, \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall k, x_k = a + bk\}$.

II.4.b. On vérifie que la suite $(-\dfrac{1}{2}k^2)_{k\geqslant 0}$ est dans S.

II.4.c. Une suite (x_k) est dans S si et seulement si la suite de terme général $x_k + \frac{1}{2}k^2$ est dans S_0. On en déduit la forme générique d'une suite élément de S : $\forall k, x_k = a + bk - \frac{1}{2}k^2$.
Si on ajoute les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ on obtient une unique solution, la suite de terme général $x_k = \frac{k(n+1) - k^2}{2}$.
II.4.d. Notons $W = (w_1, \ldots, w_n)$, ajoutons $w_0 = w_{n+1} = 0$. La suite tronquée $(w_k)_{0 \leqslant k \leqslant n+1}$ vérifie la récurrence qui définit S et les conditions imposées aux rangs $k = 0$ et $k = n+1$. On a donc nécessairement $\forall k \in \{1, \ldots, n\}, w_k = \frac{k(n+1) - k^2}{2} \geqslant 0$. Une étude rapide sur $[0, n+1]$ de $x \mapsto x(n+1) - x^2$ montre que $\|W\| = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |w_k| \leqslant \frac{(n+1)^2}{8}$ (obtenu quand $x = (n+1)/2$).

PARTIE III
Approximation de la solution du problème P

Question III.1
Une approximation de la dérivée seconde

L'inégalité de Taylor-Lagrange au rang 4 en t fournit : $u(t \pm h) = u(t) \pm hu'(t) + \frac{h^2}{2}u''(t) \pm \frac{h^3}{6}u'''(t) + R_4(t, \pm h)$ où $|R_4(t, \pm h)| \leqslant \frac{M}{24}h^4$.
On en déduit que $u(t+h) + u(t-h) - 2u(t) = h^2u''(t) + R(t,h)$ où $R(t,h) = R_4(t,h) + R_4(t,-h)$ donc $|R(t,h)| \leqslant \frac{M}{12}h^4$.

Question III.2
Problème P discrétisé

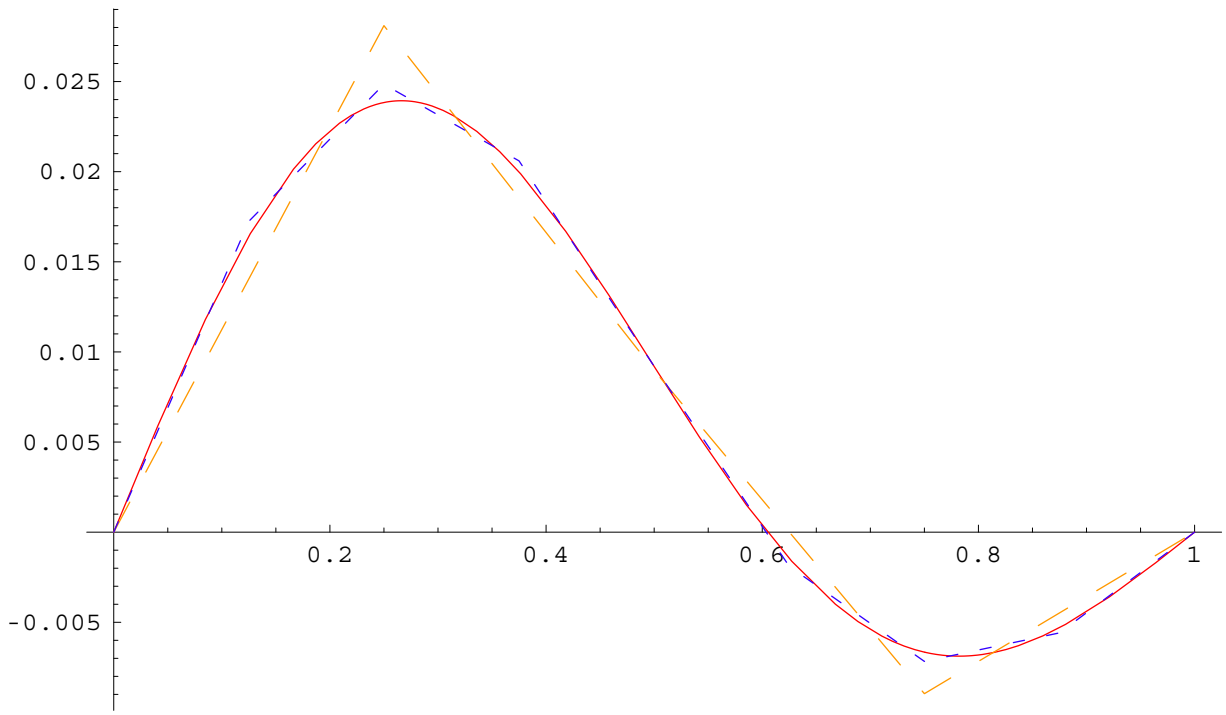
III.2.a. Si p et f sont de classe $\mathcal{C}^2$ et si u est une solution de P, u est de classe $\mathcal{C}^2$ et $u'' = p(x)u(x) - f(x)$ également, donc finalement u est de classe $\mathcal{C}^4$.
III.2.b. On suppose ici que u est la solution du problème P.
On remarque que $u(t_0) = u(0) = u(1) = u(t_{n+1}) = 0$.
Alors la k-ème composante de Z s'écrit :

$$z_k = 2u(t_k) - u(t_k - h) - u(t_k + h) + p(t_k)u(t_k)h^2 - f(t_k)h^2 = 2u(t_k) - u(t_k + h) - u(t_k + h) + h^2u''(t_k) = -R(t_k, h).$$

On en déduit que $\|Z\| \leqslant M\frac{h^4}{12}$.
III.2.c. On a $X - \tilde{X} = (A+H)^{-1}Z$, donc, d'après II.3.b puis II.4.d,

$$\|X - \tilde{X}\| \leqslant \|W\|\|Z\| \leqslant M\frac{(n+1)^2}{8}\frac{h^4}{12} = \frac{M}{96(n+1)^2}.$$

C'est dire que $\tilde{X}$ est une approximation de X à un $O(1/n^2)$ près.
$\tilde{X}$ est donc une approximation de la table des valeurs prises par u sur une subdivision à pas constant de $[0,1]$ en $(n+1)$ intervalles. On vient de constater qu'il s'agit d'une bonne approximation.
On calcule $\tilde{X}$ en résolvant le système $(A+H)\tilde{X} = Y$, ce qui peut se faire par exemple par une méthode de Gauss.
On trouvera ci-dessous une figure correspondant à l'équation $-u''(x) + \operatorname{sh} 3x\, u(x) = e^{-x} \sin 2\pi x$. On a tracé la solution en trait continu (grâce aux logiciels de calcul formel), et les approximations correspondant à $n = 3$ et $n = 7$ en traits pointillés.


0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
-0.005
0.2
0.4
0.6
0.8
1