Mines-Ponts 2002 — PSI, épreuve 1 (3h) — corrigé

PARTIE I

Question I.1
Rayon de convergence

I.1.a. Pour $f_1 : t \mapsto a$, $u_n = a^n$, $(\sum a^n x^n)$ est de rayon de convergence $1/|a|$ et de somme $F_1 : x \mapsto \dfrac{1}{1-ax}$.
Pour $f_2 : t \mapsto at$, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$, la série entière $(\sum \dfrac{a^n}{n!} x^n)$ est de rayon de convergence infini et $F_2 : x \mapsto e^{ax}$.
Pour $f_3 : t \mapsto pt - 1$, $u_n = 0$ si $n \geqslant p$, donc la série entière associée est de rayon de convergence infini. En outre, si $n \leqslant p-1$, on a $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (\frac{p}{k} - 1) = \prod_{k=1}^{n} \frac{p-k}{k} = \binom{p-1}{n}$, de sorte que $F_3 : x \mapsto (1+x)^{p-1}$.

I.1.b. Si f s'annule en un point $1/k$ où $k \in \mathbb{N}^*$, alors $u_n = 0$ dès que $n \geqslant k$ et le rayon de convergence est infini. Sinon, le critère de d'Alembert nous conduit à calculer $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |f(\dfrac{1}{n+1})| \to |f(0)|$ car f est continue en 0. Ainsi, si $f(0) = 0$, le rayon de convergence est infini, et sinon il vaut $\dfrac{1}{|f(0)|}$.

Question I.2
Suite de terme général u_n

I.2.a. f étant continue sur $[0,1]$, il existe $\eta > 0$ tel que $0 \leqslant x \leqslant \eta \Rightarrow f(x) > \dfrac{1}{2} f(0) > 0$. Alors, dès que $n \geqslant N = 1 + \lfloor 1/\eta \rfloor$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 0$ de sorte qu'à partir du rang N, u_n a le signe de u_N.

I.2.b. Cas où $0 \leqslant |f(0)| < 1$. Soit $q = \dfrac{1 + |f(0)|}{2} < 1$. Par continuité de f à l'origine, il existe $\eta > 0$ tel que $0 \leqslant x \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)| \leqslant q$. On en déduit l'existence d'un rang N tel que $n \geqslant N \Rightarrow \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant q$. Par une récurrence évidente, on en déduit que si $n \geqslant N$ on a $|u_n| \leqslant q^{n-N} |u_N|$ donc $\lim u_n = 0$.

Cas où $|f(0)| > 1$. De façon analogue, posant $q = \dfrac{1 + |f(0)|}{2} > 1$, il existe un rang N tel que pour $n \geqslant N$ on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant q$ donc $|u_n| \geqslant q^{n-N} |u_N|$ donc $\lim |u_n| = +\infty$.

Question I.3
Série de terme général u_n
Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, au voisinage de 0 on peut écrire $f(x) = 1 + \beta x + O(x^2)$.
Alors $w_n = \ln \dfrac{v_n}{v_{n-1}} = \ln \dfrac{u_n}{u_{n-1}} - \beta(\ln n - \ln(n-1)) = \ln f(\dfrac{1}{n}) + \beta \ln(1 - \dfrac{1}{n}) = \dfrac{\beta}{n} - \dfrac{\beta}{n} + O(\dfrac{1}{n^2}) = O(\dfrac{1}{n^2})$ de sorte que la série $(\sum w_n)$ est absolument convergente.
Notons S la somme de cette série : $S = \lim(\ln v_n - \ln v_0) = \lim(\ln u_n - \beta \ln n)$ donc $\lim \dfrac{u_n}{n^\beta} = e^S = L > 0$.

Question I.4
Fonction F

I.4.a. On a vu que le rayon de convergence de la série entière considérée vaut 1.
D_F contient donc au moins l'intervalle $]-1,+1[$. Étudions la convergence de $(\sum u_n)$ et de $(\sum (-1)^n u_n)$.
u_n est à termes positifs donc les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum n^\beta)$ sont de mêmes natures : elles convergent si et seulement si $\beta < -1$.
Si $\beta < -1$, la série $(\sum (-1)^n u_n)$ est absolument convergente. Si $\beta \geqslant 0$, (u_n) ne tend pas vers 0 et donc la série diverge. Reste à considérer le cas où $-1 \leqslant \beta < 0$. La suite (u_n) est à valeurs positives, tend vers 0 puisque $\beta < 0$ et est décroissante au moins à partir d'un certain rang car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = f(\dfrac{1}{n+1}) = 1 + \dfrac{\beta}{n+1} + o(\dfrac{1}{n})$ devient plus petit que 1. Le critère spécial des séries alternées s'applique et conclut à la convergence de la série.
Finalement, si $\beta < -1$, $D_F = [-1,+1]$; si $-1 \leqslant \beta < 0$, $D_F = [-1,+1[$; et si $0 \leqslant \beta$, $D_F =]-1,+1[$.

I.4.b. Ici $u_n = \dfrac{(n-\alpha)(n-1-\alpha)\ldots(1-\alpha)}{n!} = (-1)^n \dfrac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{n!}$, le rayon de convergence vaut 1 et on reconnaît le développement en série entière de $F : x \mapsto (1-x)^{\alpha-1}$.

PARTIE II

Question II.1
Propriétés de la fonction g

II.1.a. Au voisinage de 0, si $x \neq 0$, on dispose de $g(x) = \dfrac{1}{\tan \pi x} - \dfrac{1}{\pi x} \sim \dfrac{\pi x - \tan \pi x}{\pi^2 x^2} \sim \dfrac{\frac{\pi^3 x^3}{3}}{\pi^2 x^2} = \dfrac{\pi x}{3}$, donc g est continue en 0 et donc évidemment sur $]-1,+1[$.
Une primitive de g sur $]-1,0[$ ou sur $]0,+1[$ est $G(x) = \dfrac{1}{\pi} \ln \left|\dfrac{\sin \pi x}{x}\right|$, de sorte que $I_\alpha = G(\alpha) - \lim\limits_0 G = \dfrac{1}{\pi} \ln \dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}$.

II.1.b. h est clairement continue par morceaux et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on en déduit que sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier vers la fonction 2π-périodique $\tilde{h}$ qui coïncide avec h mais telle que $\tilde{h}(0) = \tilde{h}(2\pi) = \dfrac{1}{2}(1 + e^{-2i\pi\alpha})$.
Les coefficients de Fourier de h s'écrivent, avec les notations standard :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(n+\alpha)t}\, dt = \frac{1}{2i\pi(n+\alpha)}(1 - e^{-2i\pi(n+\alpha)}) = \frac{1}{2i\pi(n+\alpha)}(1 - e^{-2i\pi\alpha}).$$

En particulier en 0 :

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(0) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2i\pi\alpha}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i\pi(n+\alpha)}(1 - e^{-2i\pi\alpha}) \\
&= \frac{1 - e^{-2i\pi\alpha}}{2i\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+\alpha} + \frac{1}{-n+\alpha} \right) \right) \\
&= \frac{1 - e^{-2i\pi\alpha}}{2i\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right),
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} = i \frac{1 + e^{-2i\pi\alpha}}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} - \frac{1}{\pi\alpha} = \frac{\cos \pi\alpha}{\sin \pi\alpha} - \frac{1}{\pi\alpha} = g(\alpha).$$

II.1.c. La série de terme général $\dfrac{2t}{t^2 - n^2}$ converge normalement donc uniformément sur $[0, \alpha]$ pour tout α fixé dans $]-1,+1[$, puisque $\left|\dfrac{2t}{t^2 - n^2}\right| \leqslant \dfrac{2|\alpha|}{n^2 - \alpha^2} = O(1/n^2)$.
On en déduit qu'on peut intégrer terme à terme la somme de la série, et que

$$I_\alpha = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\alpha \frac{2t}{t^2 - n^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln |t^2 - n^2| \right]_0^\alpha = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - \frac{\alpha^2}{n^2}).$$

Comparant avec le résultat du a. on obtient : $\dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \frac{\alpha^2}{n^2})$.

Question II.2
On écrit : $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{\alpha^2}{k^2})$ d'où la convergence de la suite (u_n), de limite $\dfrac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}$.

PARTIE III

Question III.1
Existence des fonctions G_n et G
G n'est autre que la fonction Γ d'Euler : elle est bien définie sur $]0,+\infty[$, car au voisinage de 0, $t^{x-1}e^{-t} \sim t^{x-1}$ et $x - 1 < -1$ d'une part, et au voisinage de $+\infty$, $t^{x-1}e^{-t} \ll t^{-2}$; elle est continue sur tout compact $[a,b]$ de $]0,+\infty[$ (et donc continue sur $]0,+\infty[$) car $(t,x) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[\times [a,b]$ et y est majorée par la fonction de domination suivante, qui est sommable sur $]0,+\infty[$: $t \mapsto \begin{cases} t^{a-1}e^{-t}, & \text{si } 0 < t < 1\,; \\ t^{b-1}e^{-t}, & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$

On peut écrire, pour tout $x > 0$, $G_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_n(x,t)\, dt$.

Fixons $x > 0$. Les $t \mapsto \varphi_n(x,t)$ sont toutes positives sur $]0,+\infty[$. Montrons qu'à x et $t > 0$ fixés, la suite $(\varphi_n(x,t))$ croît et converge, de limite $\varphi(x,t)$. Cela permettra de conclure à la convergence simple cherchée : $\lim G_n(x) = G(x)$, en utilisant le théorème de convergence monotone par exemple.
Or en effet, si $t > n+1$, $\varphi_n(x,t) = \varphi_{n+1}(x,t) = 0$; si $n < t \leqslant n+1$, $\varphi_n(x,t) = 0 \leqslant \varphi_{n+1}(x,t)$; et si $0 < t \leqslant n$, notant $\psi(t) = (n+1)\ln(1-\dfrac{t}{n+1}) - n\ln(1-\dfrac{t}{n})$, on a $\psi'(t) = \dfrac{1}{1-t/n} - \dfrac{1}{1-t/(n+1)} = \dfrac{t}{(n+1-t)(n-t)} \geqslant 0$ et $\psi(0) = 0$. Donc la suite $(\varphi_n(x,t))$ est bien croissante. En outre, à $x > 0$ et $t > 0$ fixés, pour $n \geqslant t$, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ car $-t = \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1-t/n)$.

Question III.2
Une expression de $G_n(x)$

III.2.a. Une intégration par parties fournit :

$$J_{n+1}(x) = \int_0^1 (1-t)^{n+1}t^{x-1}\,dt = \left[(1-t)^{n+1}\frac{t^x}{x}\right]_0^1 + \frac{n+1}{x}\int_0^1 (1-t)^n t^x\,dt = \frac{n+1}{x}J_n(x+1).$$

En outre on a clairement $J_0(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}/, dt = \frac{1}{x}$.
Une récurrence immédiate conduit alors à $J_n(x) = \dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

III.2.b. Le changement de variable $t = un$ transforme

$$G_n(x) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\,dt = n^x \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\,du = n^x J_n(x) = \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Question III.3
Relation des compléments
$G(x)G(1-x)$ est la limite, quand $n \to +\infty$, de $G_n(x)G_n(1-x)$.
Or on vient d'écrire :

$$\begin{aligned} G_n(x)G_n(1-x) &= \frac{n!^2\,n}{x(x+1)\cdots(x+n)\times(1-x)(2-x)\cdots(n+1-x)} \\ &= \frac{1}{x}\,\frac{n}{n+1-x}\,\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{x}{k})(1-\frac{x}{k})} \\ &= \frac{1}{x}\,\frac{n}{n+1-x}\,\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-\frac{x^2}{k^2})}, \end{aligned}$$

de sorte que, se rappelant les résultats de II.2, on a :

$$G(x)G(1-x) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{x^2}{k^2})} = \frac{1}{x}\,\frac{\pi x}{\sin\pi x} = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$