Mines-Ponts 2000

PSI 1

Partie préliminaire

M est un sous-ensemble non vide de $M_2(\mathbb{C})$ qui est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ donc sur $\mathbb{R}$. Si $m=\begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}$ et $m'=\begin{pmatrix} a' & ib' \\ i\overline{b'} & \overline{a'}\end{pmatrix}$ et si $\lambda\in\mathbb{R}$, $m+\lambda m'=\begin{pmatrix} a+\lambda a' & i(b+\lambda b') \\ i\overline{(b+\lambda b')} & \overline{a+\lambda a'}\end{pmatrix}$ est un élément de M. Donc M est un sous-espace vectoriel réel de $M_2(\mathbb{C})$.

Notons $a=a_1+ia_2$ et $b=b_1+ib_2$ les décomposition de a et b en partie réelle et imaginaire. Alors $m = a_1 I + a_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ ce qui montre que M est engendré (sur $\mathbb{R}$) par les 4 matrices I, $v_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix}$ et $u_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$. De plus, ces 4 matrices sont indépendantes puisque $m = 0$ implique $a = b = 0$. Donc $\dim_{\mathbb{R}} M = 4$.

On remarque que $\begin{cases} v_1^2 = v_2^2 = u_1^2 = -I \\ v_1v_2 = -v_2v_1 = u_1 \\ u_1v_1 = -v_1u_1 = v_2 \\ v_2u_1 = -u_1v_2 = v_1\end{cases}$. Il en résulte que la multiplication est une opération interne dans M.

Première partie

I. 1. Si $m=\begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}$, $m+{}^t\overline{m}=\begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \overline{a} & -ib \\ -i\overline{b} & a\end{pmatrix}=(Tr\, m)\ I$ et $m.{}^t\overline{m}=\begin{pmatrix} a\overline{a}+b\overline{b} & 0 \\ 0 & a\overline{a}+b\overline{b}\end{pmatrix}=(\det m)\ I$.

Une matrice g de M est donc dans G ssi $g\,{}^t\overline{g}=I$, c'est à dire ssi ${}^t\overline{g}=g^{-1}$.

Si $Tr\ m = 0$, $m+{}^t\overline{m}=0$ d'où $m^2=-m.{}^t\overline{m}=-(\det m)I={}^tm^2$.

I. 2. Par unicité de la décomposition d'une matrice en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, une matrice m de M antisymétrique ssi elle est multiple de u_1. Donc $U = \{u_1, -u_1\}$.

D'après les calculs de la fin de la partie préliminaire, la relation $m.u_1=u_1.\overline{m}$ est satisfaite pour $m = I$, $m = v_1$, $m = v_2$ et bien sûr pour $m = u_1$ puisque u_1 est réelle. Par linéarité, elle est donc satisfaite pour toute matrice m de M. On peut évidemment remplacer u_1 par $-u_1$, d'où $m.u=u.\overline{m}$ pour tout m dans M et tout u dans U.

Si $Tr\ m = 0$, m est combinaison linéaire de v_1, v_2 et u_1. Le produit de chacune de ces matrices (à droite ou à gauche) par u_1 est dans V. Donc $m.u_1$ et $u_1.m$ sont dans V; on peut bien sûr remplacer u_1 par $-u_1$.

I. 3. $(m\,|\,m)=\dfrac{1}{2}Tr(m\,{}^t\overline{m})=\det m$ d'après **1.**, d'où $\|m\|=\sqrt{\det m}$.

Par suite, $\|m.w\|=\sqrt{\det m.w}=\sqrt{\det m}\sqrt{\det w}=\|m\|\,\|w\|$.

I. 4. a. Si $g=\begin{pmatrix} a & ib \\ i\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix}\in G$, $|a|^2+|b|^2=a_1^2+a_2^2+b_1^2+b_2^2=1$ (avec $a=a_1+ia_2$ et $b=b_1+ib_2$ comme dans la partie préliminaire). Il existe alors un unique $\vartheta\in[0,\pi]$ tel que $a_1=\cos\vartheta$ et

$$g = \cos\vartheta\ \ I + a_2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix} + b_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0\end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} = \cos\vartheta\ \ I + m$$

où m est une matrice de trace nulle de M.

$I=g.{}^t\overline{g}=(\cos\vartheta\ I+m).(\cos\vartheta\ I+{}^t\overline{m})=\cos^2\vartheta\ I+\cos\vartheta\left(m+{}^tm\right)+m.{}^t\overline{m}=\left(\cos^2\vartheta+\det m\right)I$. On en tire $\det m=\sin^2\vartheta$, d'où, d'après **1.**, $m^2=-\left(\sin^2\vartheta\right)\ I$.

b. Soit $m=\begin{pmatrix} a & ib \\ i\bar{b} & \bar{a}\end{pmatrix}\in M$ non nulle ; l'un au moins des coefficients a ou b est non nul et par conséquent, $\det m=|a|^2+|b|^2\neq 0$. On peut donc définir $g_1=\dfrac{1}{\sqrt{\det m}}m$ qui est aussi dans l'espace vectoriel M. De plus, comme les matrices sont de taille 2, $\det g_1=\dfrac{1}{\det m}\det m=1$. Donc g_1 est bien une matrice de G.

I. 5. D'après **1.** , $g_1^2=-I$. On en déduit que $m_\vartheta.m_{\vartheta'}=I\cos(\vartheta+\vartheta')+g_1\sin(\vartheta+\vartheta')=m_{\vartheta+\vartheta'}$ où $\vartheta+\vartheta'$ représente l'addition dans le groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ des réels modulo 2π. Il en résulte que $G(g_1)$ est un sous-ensemble non vide de G, stable par composition et passage à l'inverse (car $m_\vartheta^{-1}=m_{2\pi-\vartheta}$), c'est à dire un sous-groupe de G. De plus, ce sous-groupe est isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, c'est à dire au groupe des rotations du plan euclidien, et en particulier est commutatif.

Deuxième partie

II. 1. a. Le sous-espace de M engendré par les matrices I, v_1 et v_2 (notation de la partie préliminaire) est contenu dans V qui est donc au moins de dimension 3. Comme M contient la matrice u_1 qui n'est pas symétrique, V est exactement de dimension 3 et admet le système { I, v_1 et v_2} comme base.

b. L'application l_g est manifestement linéaire. Par ailleurs, ${}^t l_g(w)={}^t w.{}^t g+g.{}^t w=l_g(w)$ puisque w est symétrique. Donc l_g est bien un endomorphisme de V.

$l_g(I)=g+{}^t g$. Si l_g était le morphisme nul, on en déduirait que $g=-{}^t g$, mais comme $Tr\ g=0$, on a aussi $g=-{}^t\bar{g}$ et par conséquent $g=\bar{g}$. Or g est dans le noyau de la forme linéaire Tr qui est l'hyperplan engendré par v_1, v_2 et u_1 et les seules matrices réelles de cet hyperplan sont des multiples de u_1. Enfin, comme $g\in G$, $g=\pm u_1$. Mais dans ce cas, $l_g(v_1)=-2v_1\neq 0$ ce qui contredit l'hypothèse initiale. Donc l_g n'est pas le morphisme nul.

II. 2. a. Il résulte de **I. 1.** que pour tout g dans G de trace nulle, $g^2={}^t g^2=-I$. On en déduit

$$l_g\circ l_g(w)=g.(g.w+w.{}^t g)+(g.w+w.{}^t g).{}^t g=g^2.w+2g.w.{}^t g+w.{}^t g^2=2g^2.w+2g.w.{}^t g=2g.l_g(w).$$

En composant par l_g, $l_g(g.l_g(w))=\dfrac{1}{2}l_g\circ l_g\circ l_g(w)=g.l_g\circ l_g(w)=2g^2.l_g(w)=-2l_g(w)$.

En utilisant **I. 3.** , $\|g.l_g(w)\|=\|g\|\,\|l_g(w)\|=\sqrt{\det g}\,\|l_g(w)\|=\|l_g(w)\|$.

Enfin, puisque $g^{-1}={}^t\bar{g}$ (**I. 1.**), et, pour u dans U, $g.u=u.\bar{g}$ (**I. 2.**), $l_g(g.u)=g^2.u+g.u.{}^t g=-u+u.\bar{g}.{}^t g=0$.

b. Pour v et w dans V, en sachant que $Tr(v.v')=Tr(v'.v)$ et en utilisant la propriété ${}^t\bar{g}=g^{-1}=-g$,

$$\left(l_g(v)\mid w\right)=\frac{1}{2}Tr\left((g.v+v.{}^t g).{}^t\bar{w}\right)=\frac{1}{2}Tr\left(v.{}^t\bar{w}.g+v.{}^t g.{}^t\bar{w}\right)=\left(v\mid {}^t\bar{g}.w+w.\bar{g}\right)=\left(v\mid l_{g^{-1}}(w)\right)=-\left(v\mid l_g(v)\right).$$

Donc $l_g{}^*=-l_g$; autrement dit, l_g est antisymétrique.

c. Alors, pour tout w dans V, $\left(l_g(w)\mid g.l_g(w)\right)=-\left(w\mid l_g(g.l_g(w))\right)=-\left(w\mid -2l_g(w)\right)=2\left(w\mid l_g(w)\right)=0$ puisque l_g est antisymétrique. Les matrices $l_g(w)$ et $g.\ l_g(w)$ sont donc perpendiculaires.

II. 3. a. Une matrice u de U est égale à u_1 ou à $-u_1$. Elle est donc de déterminant 1, d'où $u.{}^t\bar{u}=I$ et $\left(u\mid h_0\right)=\dfrac{1}{2}Tr\left(u.{}^t\bar{u}.{}^t\bar{g}\right)=\dfrac{1}{2}Tr(-g)=0$.

Remarquons que $l_g(u)=g.u+u.{}^t g=g.u-u.\bar{g}=0$ d'après **I. 2.** , d'où

$$\left(u\mid h_1\right)=\left(u\mid l_g(v)\right)=-\left(l_g(u)\mid v\right)=0$$

$$\left(u\mid h_2\right)=\left(u\mid g.l_g(v)\right)=\frac{1}{2}\left(u\mid l_g\circ l_g(v)\right)=\frac{1}{2}\left(l_g\circ l_g(u)\mid v\right)=0.$$

Dans le dernier calcul de **2. a.** , on a vu que $l_g(g.u)=0$, d'où

$$\left(h_0\mid h_1\right)=\left(g.u\mid l_g(v)\right)=-\left(l_g(g.u)\mid v\right)=0$$

$\left(h_0 \mid h_2\right) = \left(g.u \mid g.l_g(v)\right) = \dfrac{1}{2}\left(g.u \mid l_g \circ l_g(v)\right) = -\dfrac{1}{2}\left(l_g(g.u) \mid l_g(v)\right) = 0$.

Enfin $\left(h_1 \mid h_2\right) = \left(l_g(v) \mid g.l_g(v)\right) = 0$ d'après **2. c.**

b. On vérifie aisément que V est l'hyperplan orthogonal à u_1. En effet, V est engendré par les trois matrices I, v_1 et v_2 et $\begin{cases} \left(u_1 \mid I\right) = Tr\, u_1 = 0 \\ \left(u_1 \mid v_1\right) = Tr\left(u_1.{}^t\overline{v}_1\right) = Tr(-v_2) = 0 \\ \left(u_1 \mid v_2\right) = Tr\left(u_1.{}^t\overline{v}_2\right) = Tr(v_1) = 0 \end{cases}$. Il en résulte que h_0, h_1 et h_2 sont dans V (c'est à dire sont symétriques) et en constituent un système orthogonal. De plus $h_0 = g.u \neq 0$ car g et u sont inversibles, $h_1 = l_g(v) \neq 0$ par hypothèse et $h_2 = g.h_1 \neq 0$ car g est inversible. Donc ces trois matrices constituent bien une base orthogonale de V.

Pour obtenir une base orthonormée, il suffit alors de normaliser les vecteurs. On remarque

d'une part que $\|h_0\| = \|g\|\|u\| = \sqrt{\det g}\sqrt{\det u} = 1$,

d'autre part que $\|h_2\|^2 = \left(g.l_g(v) \mid g.l_g(v)\right) = \dfrac{1}{2}\left(l_g \circ l_g(v) \mid g.l_g(v)\right) = \left(l_g(v) \mid l_g(v)\right) = \|h_1\|^2$.

On prendra donc comme base orthonormée le système $\left\{h_0, \dfrac{h_1}{\|l_g(v)\|}, \dfrac{h_2}{\|l_g(v)\|}\right\}$.

Pour trouver la matrice de l_g dans cette base, on remarque que $l_g(h_0) = l_g(g.u) = 0$ (**2. a.**) et en utilisant **2. b.** puis **2. a.** , on calcule

$$\left(l_g\left(\frac{h_1}{\|l_g(v)\|}\right) \,\middle|\, \frac{h_2}{\|l_g(v)\|}\right) = \frac{1}{\|l_g(v)\|^2}\left(l_g \circ l_g(v) \mid g.l_g(v)\right) = -\frac{1}{\|l_g(v)\|^2}\left(l_g(v) \mid l_g\left(g.l_g(v)\right)\right) = \frac{2\left(l_g(v) \mid l_g(v)\right)}{\|l_g(v)\|^2} = 2 .$$

Comme la matrice de l_g dans une base orthonormée est antisymétrique, elle s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$\frac{1}{2} l_g$ est donc la projection orthogonale sur le plan engendré par h_1 et h_2 composée avec la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans ce plan orienté.

II. 4. En utilisant l'égalité $g^2 = -I$, $\begin{cases} m_\vartheta.u = \left(I\cos\vartheta + g\sin\vartheta\right).u = u\cos\vartheta + h_0\sin\vartheta \\ m_\vartheta.h_0 = \left(I\cos\vartheta + g\sin\vartheta\right).h_0 = h_0\cos\vartheta - u\sin\vartheta \\ m_\vartheta.h_1 = \left(I\cos\vartheta + g\sin\vartheta\right).h_1 = h_1\cos\vartheta + h_2\sin\vartheta \\ m_\vartheta.h_2 = \left(I\cos\vartheta + g\sin\vartheta\right).h_2 = h_2\cos\vartheta - h_1\sin\vartheta \end{cases}$. On en déduit que la matrice de s_ϑ dans la base $\{u, h_0, h_1, h_2\}$ s'écrit $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$. On peut remarquer que cette base n'est pas orthonormée mais qu'elle est orthogonale, que u et h_0 sont normés et que si on normalise h_1 et h_2 , la matrice ne changera pas.